

Mathematik 2

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Heiko Knospe
Technische Hochschule Köln
Fakultät für Informations-, Medien- und Elektrotechnik
Institut für Nachrichtentechnik

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Komplexe Zahlen | 5 |
| 1.1 | Definition und Rechenregeln | 5 |
| 1.2 | Komplexe Funktionen und die Eulersche Formel | 12 |
| 1.3 | Komplexe Potenzen und Wurzeln | 14 |
| 1.4 | Komplexe Darstellung von Schwingungen | 16 |
| 2 | Integralrechnung | 19 |
| 2.1 | Das Riemann-Integral | 19 |
| 2.2 | Das unbestimmte Integral und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 31 |
| 2.3 | Grundintegrale | 35 |
| 2.4 | Partielle Integration | 36 |
| 2.5 | Substitutionsregel | 38 |
| 2.6 | Partialbruchzerlegung | 42 |
| 2.7 | Uneigentliche Integrale | 45 |
| 2.8 | Fourier-Reihen | 48 |
| 3 | Gewöhnliche Differentialgleichungen | 51 |
| 3.1 | Differentialgleichungen erster Ordnung | 51 |
| 3.2 | DGL erster Ordnung mit trennbaren Variablen | 52 |
| 3.3 | Lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten | 52 |
| 3.4 | Lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten | 55 |
| 4 | Lineare Abbildungen und Matrizen | 61 |
| 4.1 | Vektorräume und Untervektorräume | 61 |
| 4.2 | Lineare Abbildungen | 63 |
| 4.3 | Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Rang | 69 |
| 4.4 | Determinante | 75 |
| 4.5 | Orthogonale Abbildungen und Matrizen | 78 |
| 4.6 | Eigenwerte und Eigenvektoren | 80 |
| 4.7 | Koordinaten und Basiswechsel | 85 |
| 4.8 | Homogene Koordinaten | 93 |
| 5 | Funktionen von mehreren Variablen | 97 |
| 5.1 | Einführung | 97 |
| 5.2 | Grenzwert und Stetigkeit | 98 |
| 5.3 | Partielle Ableitungen und Gradient | 101 |
| 5.4 | Extremwerte | 107 |
| 5.5 | Totales Differential | 110 |
| 5.6 | Fehlerfortpflanzung | 111 |
| 5.7 | Implizite Funktionen | 113 |
| 5.8 | Mehrdimensionale Integration | 115 |

Literatur**119**

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition und Rechenregeln

Über den reellen Zahlen können Gleichungen wie $x^2 = -1$ nicht gelöst werden, da keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen existieren. Deshalb erweitert man den Zahlbereich auf die sogenannten **komplexen Zahlen**, die wir später als Ausdrücke der Form $x + y\sqrt{-1} = x + yj$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ darstellen werden.

Definition 1.1.1 Auf dem \mathbb{R}^2 definieren wir

(a) die Addition durch $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
(entspricht der Addition im Vektorraum \mathbb{R}^2)

(b) die Multiplikation $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
(neu)

Die Menge \mathbb{R}^2 mit diesen beiden Operationen wird als Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder als Gaußsche Zahlenebene bezeichnet. Die Elemente der Form $(x, 0)$, d.h. die Elemente der x - oder reellen Achse, können mit den reellen Zahlen identifiziert werden und man schreibt dann x statt $(x, 0)$. Die Elemente der Form $(0, y)$, d.h. die Elemente der y - oder imaginären Achse, heißen rein imaginär. $(0, 1)$ wird auch mit j bezeichnet und heißt die imaginäre Einheit.

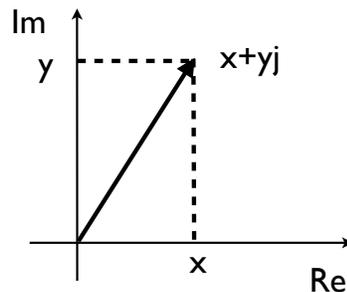


Abbildung 1: Komplexe Zahl $(x, y) = x + yj$ in der Gaußschen Zahlenebene

Der Begriff "imaginär" lässt erkennen, dass die Verwendung solcher Zahlen (wie zuvor auch der irrationalen und sogar der negativen Zahlen) nicht selbstverständlich war. Die Existenz ist aber durch eine eindeutige Definition gesichert und die Verwendung hat sich in vielen Fällen als vorteilhaft erwiesen. In der Mathematik und Physik wird die imaginäre Einheit übrigens meistens mit i bezeichnet, während in den Ingenieurwissenschaften j üblich ist, um Verwechslungen mit der Stromstärke zu vermeiden.

Komplexe Zahlen (x, y) kann man als Ortsvektor oder Zeiger vom Nullpunkt zum Punkt (x, y) darstellen. Der Zeiger kann zeitabhängig sein, z.B. um eine

komplexe zeitabhängige Spannung darzustellen.

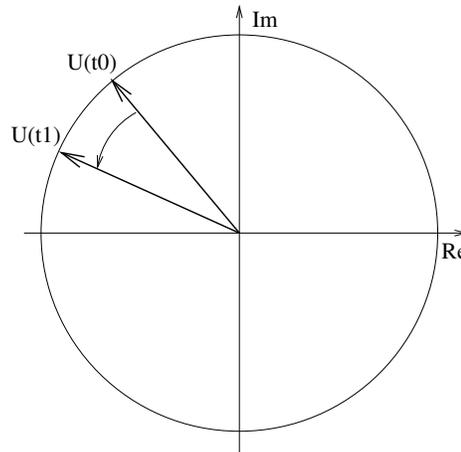


Abbildung 2: Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene \mathbb{C}

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + yj = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

so dass komplexe Zahlen immer in der kartesischen Form (*Normalform*) $z = x + yj$ geschrieben werden können. x und y sind die *kartesischen Koordinaten* von z . Dabei heißt x der *Realteil* $\operatorname{Re}(z)$ und y *Imaginärteil* $\operatorname{Im}(z)$. Man beachte, dass x und y reelle Zahlen sind. Überträgt man die Additions- und Multiplikationsregeln auf die Normalform, so gilt:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1j) + (x_2 + y_2j) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)j \\ (x_1 + y_1j) \cdot (x_2 + y_2j) &= x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)j \end{aligned}$$

Für die imaginäre Einheit gilt:

$$j^2 = j \cdot j = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 + j0 = -1$$

j ist also eine der Wurzeln von -1 . Deshalb schreibt man auch $j = \sqrt{-1}$. Mit komplexen Zahlen kann also auf die gewohnte Weise gerechnet werden, wenn man $j^2 = -1$ berücksichtigt.

Beispiele: Sei $z_1 = 2 + 3j$, $z_2 = -3 + 2j$. Dann gilt:

- $z_1 + z_2 = (2 - 3) + (3 + 2)j = -1 + 5j$
- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = 2 + 3j + (3 + (-2)j) = (2 + 3) + (3 + (-2))j = 5 + j$
- $z_1 z_2 = (2 + 3j)(-3 + 2j) = -6 - 6 + (4 - 9)j = -12 + (-5)j$

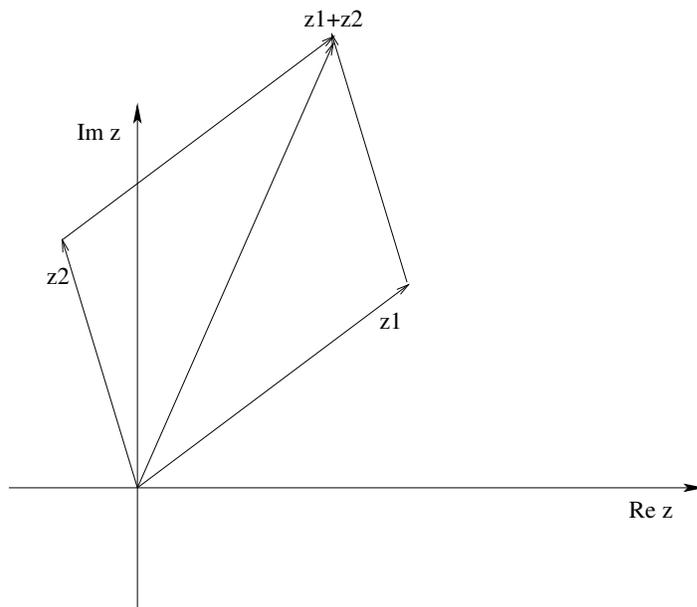


Abbildung 3: Addition zweier komplexer Zahlen (vektorielle Addition)

Definition 1.1.2 Ist $z \in \mathbb{C}$ und $z = x + yj$, so nennen wir

- (a) $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ den Realteil von z
- (b) $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ den Imaginärteil von z
- (c) $\bar{z} = x - yj \in \mathbb{C}$ die zu z komplex konjugierte Zahl.

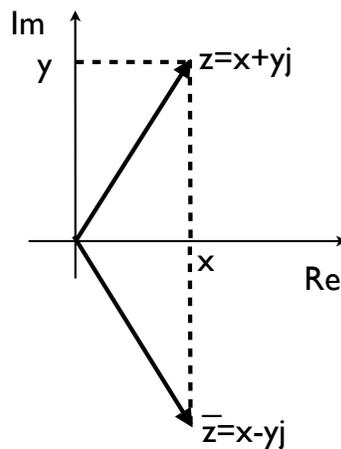


Abbildung 4: Komplexe Konjugation

Satz 1.1.3 Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, Dann gilt:

$$(a) \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \operatorname{Re}(z)$$

$$(c) \quad \frac{1}{2j}(z - \overline{z}) = \operatorname{Im}(z)$$

$$(d) \quad z\overline{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$$

$$(e) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(f) \quad z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

Beweis: Alle Eigenschaften werden elementar nachgerechnet.

Die Eigenschaft d) wird z.B. bei der Berechnung von Quotienten komplexer Zahlen verwendet: man erweitert mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners und erhält im Nenner eine reelle Zahl:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\overline{b}}{b\overline{b}} = \frac{a\overline{b}}{(\operatorname{Re} b)^2 + (\operatorname{Im} b)^2}$$

Beispiel:

$$\frac{2 + 3j}{-3 + 2j} = \frac{(2 + 3j)(-3 - 2j)}{(-3 + 2j)(-3 - 2j)} = \frac{-13j}{3^2 + 2^2} = -j$$

Satz 1.1.4 Die komplexen Zahlen \mathbb{C} genügen den gleichen Rechenregeln bzgl. Addition und Multiplikation wie die reellen Zahlen \mathbb{R} und bilden ebenso einen Körper (siehe Mathematik 1).

Beweis: Die meisten Eigenschaften sind leicht nachzurechnen. Nur die Existenz des inversen Elementes der Multiplikation ist nicht offensichtlich. Für $z = x + yj \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ rechnet man:

$$z^{-1} = \frac{1}{x + yj} = \frac{x - yj}{(x + yj)(x - yj)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}j \in \mathbb{C}$$



Mit komplexen Zahlen $x + yj$ kann auf die übliche Weise gerechnet werden, wenn man $j^2 = -1$ verwendet.

Bildquelle Mathe-Fuchs: H.-J. Remde, <http://www.remdeundpartner.de>

Definition 1.1.5 Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + yj$ ist definiert als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beispiel: $|-1 + 2j| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Die Betragsdefinition entspricht der Definition aus der Vektorrechnung! Der Betrag der komplexen Zahl $x + yj \in \mathbb{C}$ ist gleich der Norm des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Der Betrag ist immer ≥ 0 und nur Null für $x + yj = 0$. Für reelle Zahlen $x = x + 0j$ entspricht die Betragsdefinition der bereits bekannten Definition.

Die wichtigsten Betragseigenschaften sind:

Satz 1.1.6 Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

- (a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (b) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- (c) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)
- (e) $|z|^2 = z\bar{z}$

Bemerkung 1.1.7 Die Dreiecksungleichung (d) lässt sich so veranschaulichen: z_1 , z_2 und $z_1 + z_2$ sind die Seiten eines Dreiecks in der Gaußschen Zahlenebene. Die Summe $|z_1| + |z_2|$ der Beträge (Längen) zweier Dreiecksseiten ist stets größer oder gleich dem Betrag (der Länge) $|z_1 + z_2|$ der dritten Seite.

Aus (e) folgt, dass $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gilt. Man beachte, dass z^2 und $|z|^2$ in der Regel nicht übereinstimmen; z^2 ist eine komplexe Zahl und $|z|^2$ eine positive reelle Zahl.

Satz 1.1.8 Die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|z - z_0| = r$ mit konstanten $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ ergibt geometrisch einen Kreis um z_0 mit Radius r (siehe Abbildung 5).

Neben der Darstellung von komplexen Zahlen in der Normalform $z = x + yj$ ist die Darstellung in Polarform wichtig.

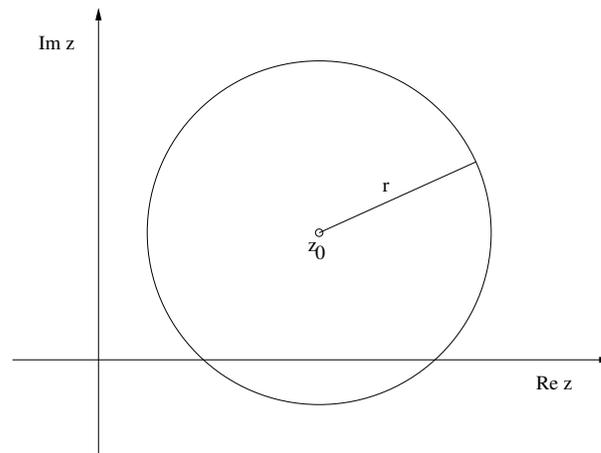


Abbildung 5: Die Menge der komplexen Zahlen z mit $|z - z_0| = r$ ist ein Kreis mit Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$.

Definition 1.1.9 Die Darstellung einer komplexen Zahl z mit

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

(wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$) heißt Polarform oder trigonometrische Darstellung von z , r heißt Betrag und φ Argument von z (Schreibweise: $\arg(z)$). r und φ nennt man auch Polarkoordinaten von z . Für $\varphi \in]-\pi, \pi]$ erhält man den Hauptwert von z .

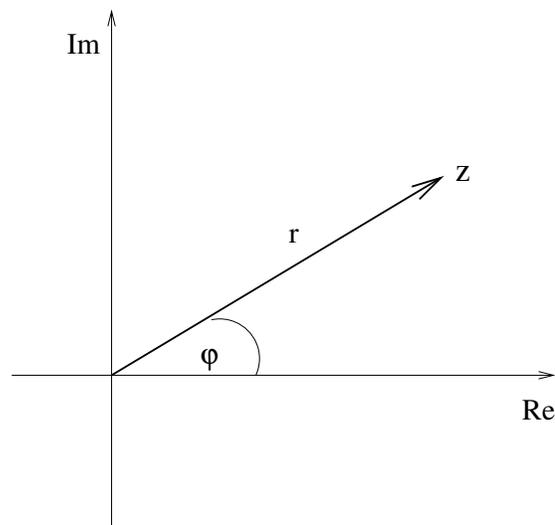


Abbildung 6: Betrag r und Argument φ einer komplexen Zahl z

Bemerkung 1.1.10 (a) Es gilt

$$|r(\cos \varphi + j \sin \varphi)| = \sqrt{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{r^2} = r$$

Also ist r in der Tat der Betrag von z .

(b) Der Hauptwert $\varphi \in]-\pi, \pi]$ ist eindeutig (falls $z \neq 0$). Ansonsten kann das Argument φ um $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) verschoben werden, ohne dass sich z ändert.

Satz 1.1.11 *Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten können wie folgt umgerechnet werden:*

(a) *Polarkoordinaten \rightarrow Kartesische Koordinaten:*

(r, φ) gegeben. Dann sind die kartesischen Koordinaten $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$.

(b) *Kartesische Koordinaten \rightarrow Polarkoordinaten:*

(x, y) gegeben. Dann sind die Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und φ laut folgender Tabelle:

| x, y | Quadrant | $\varphi \in]-\pi, \pi]$ |
|-------------------|----------|----------------------------------|
| $x > 0, y \geq 0$ | I | $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ |
| $x < 0, y \geq 0$ | II | $\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ |
| $x < 0, y < 0$ | III | $\arctan(\frac{y}{x}) - \pi$ |
| $x > 0, y < 0$ | IV | $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ |
| $x = 0, y > 0$ | | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ |
| $x = 0, y < 0$ | | $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ |
| $x = 0, y = 0$ | | φ unbestimmt |

Beispiele:

- (a) $z = -1 + j$. Dann gilt: $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \arctan(-1) + \pi = \frac{3}{4}\pi$. Das Argument φ lässt sich auch direkt angeben, da z auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten liegt.
- (b) $z = 2 - j$. Dann gilt: $r = \sqrt{5}$ und nach Tabelle $\varphi = \arctan(-\frac{1}{2})$, da z im IV. Quadranten liegt.
- (c) $z = -2j$. Dann gilt: $r = 2$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. In diesem Fall ist das Argument φ klar, denn z liegt auf der negativen y -Achse.



Erst die komplexe Zahl als Zeiger in der Ebene darstellen. Falls der Zeiger auf einer Achse oder einer Winkelhalbierenden liegt, lässt sich das Argument φ direkt angeben. Ansonsten φ nach Tabelle (arctan-Formel) ausrechnen.

1.2 Komplexe Funktionen und die Eulersche Formel

Viele reelle Funktionen können auf die komplexen Zahlen erweitert werden.

Komplexe Polynome sind Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

wobei für die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$ gilt.

Für komplexe Polynome gilt (im Unterschied zu reellen Polynomen) der *Fundamentalsatz der Algebra*:

Satz 1.2.1 Sei $n \geq 1$. Jedes Polynom n -ten Grades $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ mit $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ besitzt (mit Vielfachheiten gerechnet) n komplexe Nullstellen.

Mit anderen Worten: jedes Polynom f vom Grad n lässt sich über \mathbb{C} in ein Produkt von n Linearfaktoren zerlegen. Zur Faktorisierung kann man wie folgt vorgehen: hat man eine beliebige Nullstelle z_0 von f gefunden, so spaltet man diese Nullstelle durch Polynomdivision ab und erhält

$$f(z) = (z - z_0)g(z)$$

mit einem Polynom g vom Grad $n - 1$. Dies wiederholt man mit g bis schließlich f vollständig faktorisiert ist.

Beispiel: $f(z) = z^3 - jz^2 + 2z - 2j$. Man rät z.B. die Nullstelle j . Durch Polynomdivision erhält man:

$$f(x) = (z^2 + 2)(z - j)$$

$z^2 + 2$ hat die Nullstellen $\sqrt{2}j$ und $-\sqrt{2}j$. Die Faktorisierung von f ist dann:

$$f(z) = (z - \sqrt{2}j)(z + \sqrt{2}j)(z - j)$$

Außerdem gibt es auch komplexe *rationale Funktionen* $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ als Quotient von komplexen Polynomen. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{C} \setminus L$, wobei L die Menge der komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms ist. Man beachte, dass manche Nullstellen erst über den komplexen Zahlen sichtbar werden.

Beispiel: $r(z) = \frac{-2z+j}{z^3+z}$. Der Definitionsbereich von r ist $D_r = \mathbb{C} \setminus \{0, j, -j\}$.

Eine Verallgemeinerung der komplexen Polynome sind die komplexen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, wobei $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Entwicklungsstelle ist. Ähnlich wie im Reellen ist aber die Konvergenz zu untersuchen: man kann zeigen, dass Potenzreihen innerhalb eines Kreises um z_0 oder auf ganz \mathbb{C} konvergieren.

Beispiel: die Potenzreihen (Taylorreihen) für die Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion bei $z_0 = 0$ konvergieren auf ganz \mathbb{C} , so dass diese Funktionen also von \mathbb{R} auf \mathbb{C} fortgesetzt werden können.

Wir erinnern uns an die Potenzreihe der Exponentialfunktion (vgl. Mathematik 1) und verwenden nun als Variable $z \in \mathbb{C}$ anstelle von $x \in \mathbb{R}$:

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots$$

Setzt man $z = j\varphi$ ein, so folgt:

$$e^{j\varphi} = 1 + j\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - j\frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots$$

Fasst man die reellen und imaginären Terme zusammen, so folgt:

$$e^{j\varphi} = (1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 \mp \dots) + j(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 \pm \dots)$$

Der Realteil ist die Taylorentwicklung von $\cos(\varphi)$, der Imaginärteil die Entwicklung von $\sin(\varphi)$. Wir erhalten die **Eulersche Formel**:

Satz 1.2.2 Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich komplexe Zahlen künftig auch in der *Exponentialform* $re^{j\varphi}$ schreiben. Die Exponentialform liefert also eine kompakte Beschreibung der Polarform.



Die Eulersche Formel wird häufig verwendet. Am besten auswendig lernen. Alle Werte von $e^{j\varphi}$ liegen auf dem Einheitskreis.

Mit Hilfe der Exponentialform kann auch die Multiplikation und Division komplexer Zahlen veranschaulicht werden.

Satz 1.2.3 Sei $z_1 = r_1e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{j\varphi_2}$. Dann gilt:

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \text{ für } z_2 \neq 0$$

Dies bedeutet: zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert. Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.

1.3 Komplexe Potenzen und Wurzeln

Eine weitere Anwendung der Exponentialform ist das komplexe Potenzieren:

Satz 1.3.1 Sei $z = re^{j\varphi}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gilt:

$$z^n = r^n e^{j(n\varphi)}$$

Beispiel: Es soll $(1 + j)^{19}$ berechnet werden. Man formt $1 + j$ in Polarform um:

$$1 + j = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Man erhält dann:

$$(1 + j)^{19} = (\sqrt{2})^{19} e^{j\frac{19\pi}{4}}$$

Nun gilt: $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3}{4}\pi$ und daraus folgt:

$$(1 + j)^{19} = 2^9 \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -512 + 512j$$

Wurzeln sind Lösungen der Gleichung $z^n = a$:

Definition 1.3.2 Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt jede komplexe Zahl z , welche die Gleichung $z^n = a$ erfüllt, eine n -te Wurzel von a .

Mit Hilfe der Exponentialform erhält man leicht eine komplexe n -te Wurzel von $a = re^{j\varphi}$, wobei $\varphi \in] - \pi, \pi]$:

$$z_0 = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\varphi}{n}}$$

wobei $\sqrt[n]{r}$ die reelle n -te Wurzel aus der positiven Zahl r ist. Eine Kontrollrechnung ergibt:

$$z_0^n = (\sqrt[n]{r})^n (e^{j\frac{\varphi}{n}})^n = re^{j\varphi} = a$$

z_0 heißt **Hauptwert** der n -ten Wurzel von a . Es existieren aber n verschiedene n -te Wurzeln:

Satz 1.3.3 Die Gleichung $z^n = a$ mit $a = re^{j\varphi}$, $a \neq 0$, besitzt folgende n Lösungen:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{j\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

z_0, z_1, \dots, z_{n-1} sind also die komplexen n -ten Wurzeln von a .

Beweis:

$$z_k^n = (\sqrt[n]{r})^n (e^{j(\frac{\varphi+2k\pi}{n})})^n = r e^{j(\varphi+2k\pi)} = r e^{j\varphi} = a \quad \square$$

Beispiel: Bestimme die komplexen Lösungen von $z^3 = 2j$, d.h. die komplexen 3-ten Wurzeln aus $2j$. Es gilt: $2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$. Dann erhält man die Lösungen

$$z_k = \sqrt[3]{2} e^{j(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})}$$

mit $k = 0, 1, 2$. Das ergibt:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \right) \quad (\text{Hauptwert})$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} e^{j\frac{5\pi}{6}} = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} e^{j\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt[3]{2} j \quad \square$$

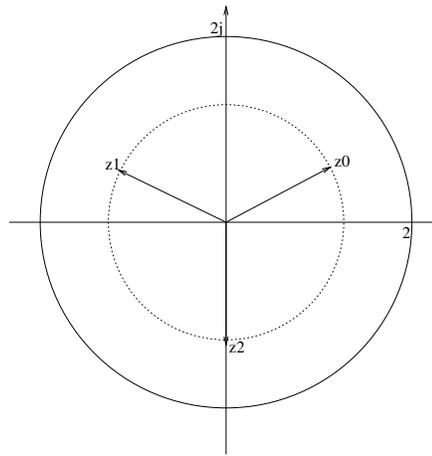


Abbildung 7: Die komplexen dritten Wurzeln z_0 , z_1 und z_2 von $2j$

Ein wichtiger Spezialfall sind komplexe Quadratwurzeln:

Satz 1.3.4 Sei $a = r e^{j\varphi}$. Die Lösungen der Gleichung $z^2 = a$, d.h. die komplexen Quadratwurzeln $\pm\sqrt{a}$ sind:

$$z_0 = \sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad z_1 = -\sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}}$$

Beispiel: die Lösungen von $z^2 = -j = e^{j(-\frac{\pi}{2})}$. Die Lösungen (Quadratwurzeln von $-j$) sind

$$z_0 = e^{j(-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \quad \text{und} \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

Bemerkung: Mit Hilfe der pq-Formel können dann die beiden Nullstellen eines beliebigen komplexen quadratischen Polynoms $z^2 + pz + q = 0$ bestimmt werden:

$$z_{0/1} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

wobei mit der Quadratwurzel (z.B.) der Hauptwert der Wurzel gemeint ist.

Beispiel: $z^2 + 2jz + (-1 + j) = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_{0/1} &= -j \pm \sqrt{j^2 - (-1 + j)} = -j \pm \sqrt{-j} \\ &= -j \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \quad \Rightarrow \\ z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)j \text{ und} \\ z_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)j \end{aligned}$$



Quadratische Gleichungen über \mathbb{C} genau wie über \mathbb{R} mit Hilfe der pq-Formel lösen. Die komplexe Wurzel in der Formel muss aber (z.B. durch Umrechnen in Polarform) noch explizit ausgerechnet werden.

1.4 Komplexe Darstellung von Schwingungen

Häufig ist es vorteilhaft, von einer reellen Schwingung

$$A \sin(\omega t + \varphi)$$

auf die komplexe Darstellung

$$Ae^{j(\omega t + \varphi)} = (Ae^{j\varphi})e^{j\omega t} = \underline{A}e^{j\omega t}$$

überzugehen. Die komplexe Darstellung liefert einen Zeiger, der um den Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene rotiert ($\frac{\omega}{2\pi}$ Umläufe je Sekunde). $\underline{A} = Ae^{j\varphi} \in \mathbb{C}$ heißt *komplexe Schwingungsamplitude* oder komplexer Scheitelwert und beschreibt die Anfangslage bei $t = 0$. Es gilt:

Satz 1.4.1 *Der Imaginärteil der komplexen Beschreibung einer Sinusschwingung (d.h. die y-Koordinate des Zeigers) liefert die reelle Schwingung zurück:*

$$\text{Im}(Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für Cosinusschwingungen (der Realteil der komplexen Beschreibung (die x-Koordinate) liefert die reelle Cosinusschwingung zurück).

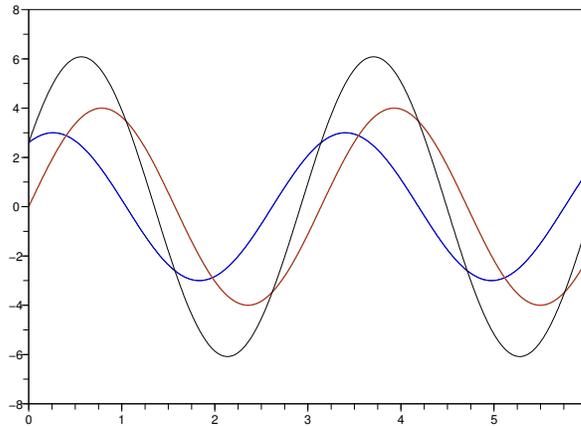


Abbildung 8: Zwei Schwingungen und Summenschwingung gleicher Frequenz

Mit dieser Darstellung kann man auf einfache Weise die Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz berechnen.

Beispiel: $y_1(t) = 4 \sin(2t)$, $y_2(t) = 3 \cos(2t - \frac{\pi}{6})$. Bestimme $y_1(t) + y_2(t)$ (siehe Abbildung 8).

- (a) Stelle alle Schwingungen als Sinusschwingungen dar. Man verwendet, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ gilt.

$$y_1(t) = 4 \sin(2t)$$

$$y_2(t) = 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

- (b) Übergang zur komplexen Form:

$$Y_1(t) = 4e^{j2t}$$

$$Y_2(t) = 3e^{j(2t + \frac{\pi}{3})} = 3e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j2t}$$

- (c) Komplexe Addition:

$$Y_1(t) + Y_2(t) = (4 + 3e^{j\frac{\pi}{3}})e^{j2t}$$

Die Addition der komplexen Amplituden 4 und $3e^{j\frac{\pi}{3}}$ ergibt:

$$\underline{A} = 4 + 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 4 + 3 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{11}{2} + j \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Die Umrechnung in Polarkoordinaten ergibt:

$$|\underline{A}| = \sqrt{5,5^2 + (1,5\sqrt{3})^2} \approx 6,08$$
$$\arg(\underline{A}) = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{11}\right) \approx 0,44$$

Also gilt (näherungsweise):

$$Y_1(t) + Y_2(t) = 6,08 e^{j \cdot 0,44} e^{j2t} = 6,08 e^{j(2t+0,44)}$$

(d) Rücktransformation in die reelle Form:

$$y_1(t) + y_2(t) = \text{Im}(Y_1(t) + Y_2(t)) = 6,08 \sin(2t + 0,44)$$

Die komplexe Summenamplitude $\underline{A} = 6,08 \cdot e^{j \cdot 0,44}$ enthält alle relevanten Informationen über die Summenschwingung, denn die Frequenz ändert sich nicht. Es genügt also im Prinzip, die beiden komplexen Schwingungsamplituden (d.h. die komplexen Zahlen 4 und $3e^{j\frac{\pi}{3}}$) der Ausgangsschwingungen zu addieren und das Ergebnis in Exponentialform umzurechnen.

2 Integralrechnung

2.1 Das Riemann-Integral

Das *bestimmte Integral* einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt die *vorzeichenbehaftete Fläche* an, die der Graph der Funktion mit der x -Achse zwischen den Grenzen a und b einschließt, wobei die Flächenstücke oberhalb der x -Achse positiv und die Flächenstücke unterhalb der x -Achse negativ in das Integral eingehen.

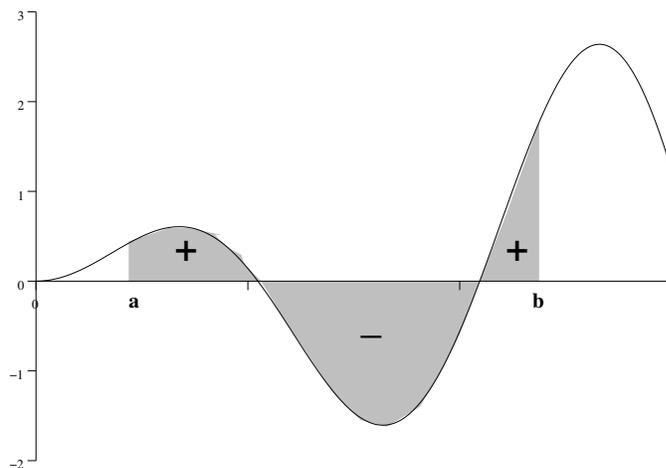


Abbildung 9: Das Integral ist hier die Summe von drei Flächen, die mit positiven oder negativem Vorzeichen zählen.

Besonders einfach sind Integrale konstanter oder linearer Funktionen, die mit Hilfe von Rechtecks- oder Dreiecksflächen bestimmt werden können (siehe Abbildung 10).

Die Integration hat eine enge Beziehung zur Ableitung und kann als ihre Umkehrung angesehen werden. Wenn die Änderungsrate einer Funktion (d.h. ihre Ableitung) gegeben ist, so liefert die Integration die ursprüngliche Funktion.

Beispiele:

- (a) Die zeitabhängige Geschwindigkeit $v(t)$ eines Objektes sei gegeben. Dann liefert das Integral $\int_a^b v(t) dt$ die Weglänge, die zwischen den Zeitpunkten $t = a$ und $t = b$ zurückgelegt wurde (siehe Abbildung 11).
- (b) Das Integral über die Leistung $P(t)$ ergibt die in einem Zeitintervall verrichtete Arbeit (Energie).

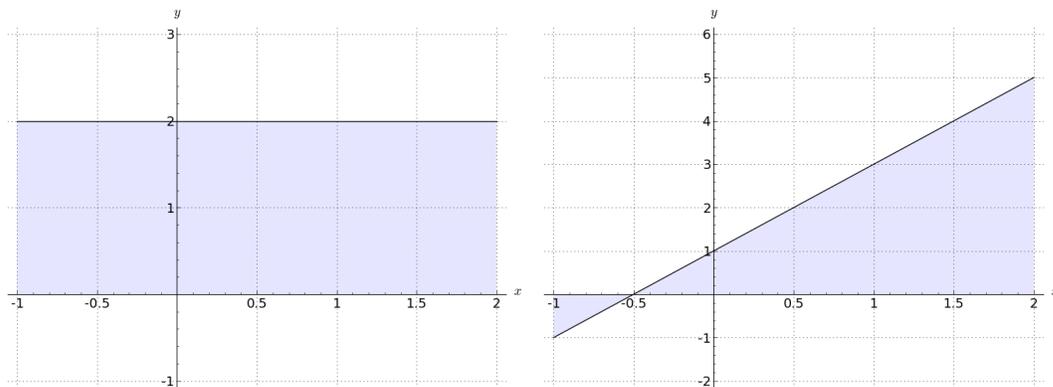


Abbildung 10: Die Integrale $\int_{-1}^2 2 \, dx = 3 \cdot 2 = 6$ (Rechtecksfläche links) und $\int_{-1}^2 (2x + 1) \, dx = \frac{1}{2}(0,5 \cdot (-1)) + \frac{1}{2}(2,5 \cdot 5) = 6$ (Summe von zwei orientierten Dreiecksflächen mit den Vorzeichen $-$ und $+$ rechts).

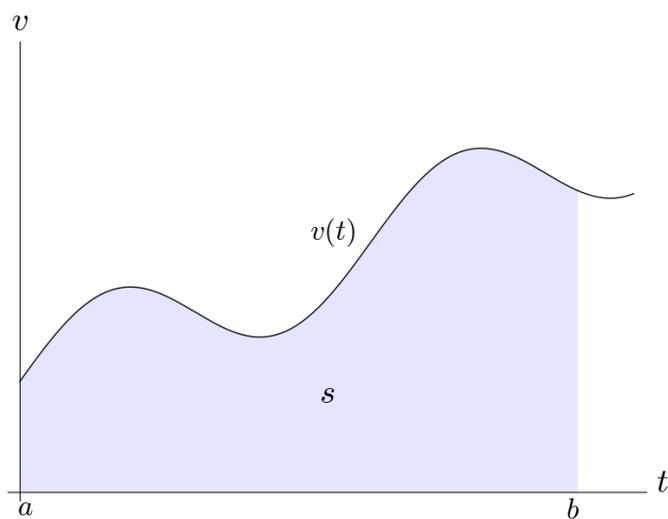


Abbildung 11: Das Integral über die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ ergibt den zurückgelegten Weg s (markierte Fläche).

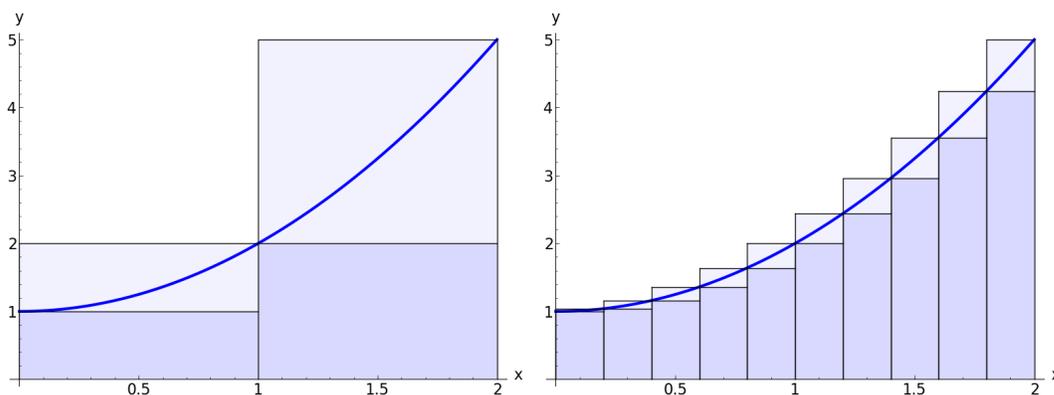


Abbildung 12: Untersummen und Obersummen für $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[0, 2]$ mit 2 Teilintervallen (links) und 10 Teilintervallen (rechts).

- (c) Wird ein Kondensator mit dem Strom $I(t)$ geladen, so ist das Integral über $I(t)$ gleich der Ladung und daher proportional zur Spannung am Kondensator.

Das Integral entsteht durch Summenbildung. Zur Bestimmung des Riemann-Integrals einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unterteilt man $[a, b]$ in "kleine" Teilintervalle und ermittelt auf diesen Intervallen jeweils den kleinsten und den größten Funktionswert. Man erhält je Teilintervall zwei Rechtecksflächen, die ein positives oder negatives Vorzeichen erhalten, je nachdem ob der Funktionswert ≥ 0 bzw. < 0 ist. Die Summation der vorzeichenbehafteten Flächen mit dem kleinsten Funktionswert in jedem Teilintervall liefert die *Untersumme*. Die Summation der Flächen mit dem größten Funktionswert liefert die *Obersumme*. Der gesuchte Integralwert liegt *zwischen* der Untersumme und der Obersumme. Die Abschätzungen des Integrals mit Hilfe der Untersumme und Obersumme ist umso genauer je kleiner die Teilintervalle sind (siehe Abbildung 12). Daher lässt man die Breite der Teilintervalle nach 0 gehen. Im Grenzwert konvergieren Untersumme und Obersumme dann gegen den gesuchten Integralwert, sofern die Funktion Riemann-integrierbar ist.

Für das Integral der Funktion $f(x)$ verwendet man die folgende Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x) dx$$

a und b sind die *Integrationsgrenzen*, x ist die *Integrationsvariable*, $f(x)$ der *Integrand* und dx das *Differential*. Das Integralzeichen \int ist aus dem Summenzeichen \sum entstanden: es werden Produkte von Funktionswerten $f(x)$ und einer infinitesimalen Intervallbreite dx summiert.

Bevor wir das Integral mit Hilfe von Untersummen und Obersummen genau definieren können, benötigen wir noch die Begriffe *Infimum* und *Supremum*. Bei unstetigen Funktionen kann es vorkommen, dass keine kleinsten (minimalen) oder größten (maximalen) Funktionswerte existieren.

Definition 2.1.1 Sei $X \subset \mathbb{R}$.

- (a) $m \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* von X , falls m eine untere Schranke ist und keine größere untere Schranke existiert. Man schreibt dann $m = \inf(X)$.
- (b) $M \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von X , falls M eine obere Schranke ist und keine kleinere obere Schranke existiert. Man schreibt dann $M = \sup(X)$.

Bemerkung: Beschränkte Mengen besitzen stets ein Infimum und ein Supremum. Falls eine Menge ein Maximum besitzt, dann ist das Maximum auch Supremum. Falls eine Menge ein Minimum besitzt, dann ist das Minimum auch Infimum.

Beispiele:

- (a) $X =]1, 2]$. Dann ist $\inf(X) = 1$ und $\sup(X) = \max(X) = 2$, aber das Minimum existiert nicht.
- (b) $X = \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} =]0, \infty[$ (Wertebereich der exp-Funktion). Dann gilt: $\inf(X) = 0$ und das Supremum existiert nicht (da X nach oben unbeschränkt)

Mit Hilfe des Supremums und Infimums können dann Ober- und Untersummen definiert werden.

Definition 2.1.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nach oben und unten) beschränkte Funktion. Sei Z eine Zerlegung (Unterteilung)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

und setze

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Dann definiert man die *Untersumme*

$$U(Z) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

und die *Obersumme*

$$O(Z) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Beispiel: Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ und Z die Zerlegung $a = x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = b = 2$. Dann ist $M_1 = \sup\{e^{-x^2} \mid x \in [0, 1]\} = e^0 = 1$ und $M_2 = \sup\{e^{-x^2} \mid x \in [1, 2]\} = e^{-1}$. Also gilt $O(Z) = 1 + e^{-1}$ (siehe Abbildung 13).

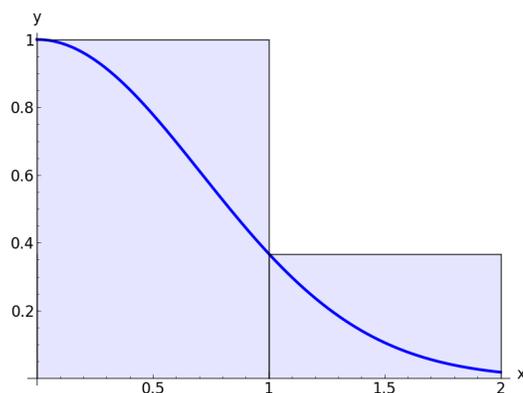


Abbildung 13: Obersumme von $f(x) = e^{-x^2}$ mit der Zerlegung $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Definition 2.1.3 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. f heißt Riemann-integrierbar (oder kurz integrierbar), falls es eine Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gibt, deren Obersummen und Untersummen gegen einen gemeinsamen reellen Grenzwert (das Integral) konvergieren, d.h.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Zusatz: Falls $a = b$ gilt, d.h. die obere und untere Grenze übereinstimmen, so setzt man das Integral gleich 0:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Bei integrierbaren Funktionen nähern sich also Untersummen und Obersummen für geeignete Zerlegungen beliebig genau an. Als Folge von Zerlegungen wählt man häufig die *äquidistanten* Zerlegungen von $[a, b]$ in n Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$, d.h. Z_n ist die Zerlegung

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + nh = b$$

Bemerkung: Die Unterteilung der x -Achse führt bei Funktionen mit stark veränderlichen y -Werten zu Problemen bei der Konvergenz der Summen, so dass für weitergehende Untersuchungen heute meistens das *Lebesgue-Integral* verwendet wird, das von Unterteilungen der y -Achse ausgeht. Es ordnet sich auch besser in die Theorie allgemeiner Summationen im maßtheoretischen Kontext ein. Für unsere Zwecke (und insbesondere für stückweise stetige Funktionen) ist das Riemann-Integral aber völlig ausreichend.

Beispiele:

- (a) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (konstante Funktion). Für eine beliebige Zerlegung Z mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

gilt: das Infimum (Minimum) m_i und das Supremum (Maximum) M_i auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist gleich c , so dass folgt:

$$U(Z) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} = c(b - a)$$

Analog gilt auch für die Obersumme $O(Z) = c(b - a)$. Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

- (b) Stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen wie z.B. $f(x) = [x]$) sind Riemann-integrierbar und das Integral berechnet sich als Summe der Rechtecksflächen. Es gilt z.B.

$$\int_{-1}^3 [x] \, dx = -1 + 0 + 1 + 2 = 2$$

- (c) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Wir definieren Z_n durch Zerlegung von $[a, b]$ in n gleich breite Intervalle:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \text{ mit } x_i = a + i \frac{b-a}{n}$$

Das Infimum (Minimum) von f auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist $f(x_{i-1}) = x_{i-1}$ (der Funktionswert am linken Rand). Also lautet die Untersumme

$$\begin{aligned} U(Z_n) &= \sum_{i=1}^n x_{i-1} \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n \left(a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right) \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n a \frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^n (i-1) \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = na \frac{b-a}{n} + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \frac{(n-1)n}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2(n-1)}{2n} \end{aligned}$$

Im Grenzwert folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= ab - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Das Supremum (Maximum) von f auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist $f(x_i) = x_i$ (der Funktionswert am rechten Rand). Also lautet die Obersumme

$$\begin{aligned} O(Z_n) &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n \left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n a \frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^n i \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = na \frac{b-a}{n} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{(n+1)n}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2(n+1)}{2n} \end{aligned}$$

Im Grenzwert folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n) &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= ab - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt: $f(x) = x$ ist auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

Das entspricht auch dem Wert, der sich mit geometrischen Überlegungen (Trapezfläche bzw. Differenz von Dreiecksflächen) ergibt.

- (d) Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ definiert. Wir definieren Z_n durch Zerlegung von $[0, 1]$ in n gleich breite Intervalle:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1 \text{ mit } x_i = \frac{i}{n}$$

Da jedes der Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl enthält, gilt nach Konstruktion von f für alle Infima $m_i = 0$ und für alle Suprema $M_i = 1$. Daraus folgt für die Untersumme

$$U(Z_n) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{n} = 0$$

und für die Obersumme

$$O(Z_n) = \sum_{i=1}^n M_i \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

Im Grenzwert gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n) = 1$, d.h. f ist auf dem Intervall $[0, 1]$ nicht Riemann-integrierbar.

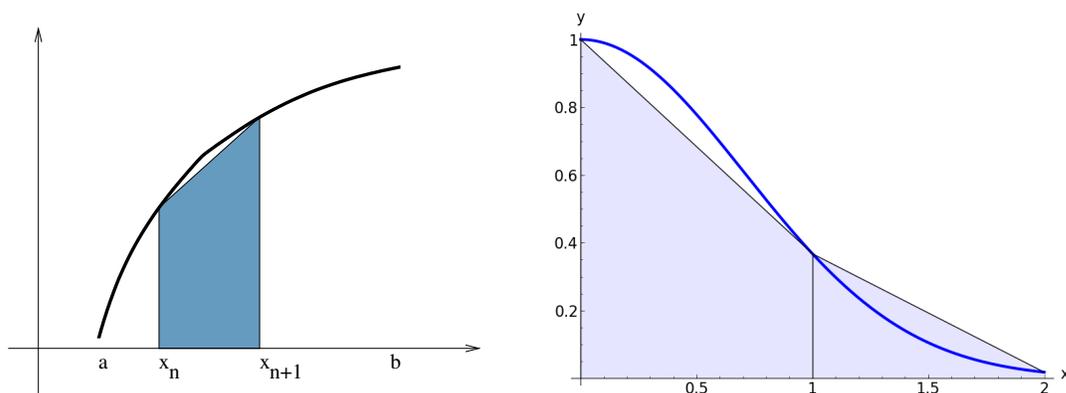


Abbildung 14: Trapezfläche (links) und Näherung der Integrals $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ mit den Stützstellen 0, 1 und 2 als Summe von zwei Trapezflächen (rechts).

Zur Berechnung von Integralen gibt es ähnlich wie bei der Ableitung eine Anzahl von Regeln, die in den folgenden Abschnitten erläutert werden. Allerdings kann dennoch eine numerische Näherung erforderlich sein. Die Untersumme und Obersumme kann numerisch einfach berechnet werden und schätzt den Integralwert stets ab:

$$U(Z_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq O(Z_n)$$

Für eine numerische Approximation werden aber statt Untersummen und Obersummen meistens andere Verfahren verwendet. Bei der *Trapezregel* wird das Integral durch eine Summe von Trapezflächen approximiert. Die orientierte Trapezfläche zwischen den Stützstellen x_n und x_{n+1} beträgt (siehe Abbildung 14):

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{2} (f(x_n) + f(x_{n+1}))$$

Unterteilt man das Integrationsintervall $[a, b]$ in n Stützstellen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ gleichen Abstands und summiert die Trapezflächen, so erhält man die summierte *Sehnentrapezformel* als Approximation für das Integral $\int_a^b f(x) dx$:

$$\frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b) \right)$$

Beispiel: Nähere das Integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ (siehe Abbildung 14). Wir betrachten die (grobe) Zerlegung Z mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Man erhält die folgende Unter- und Obersumme:

$$U(Z) = e^{-1} \cdot 1 + e^{-4} \cdot 1 \approx 0,39$$

$$O(Z) = e^0 \cdot 1 + e^{-1} \cdot 1 \approx 1,37$$

Der Wert des Integrals liegt also zwischen 0,39 und 1,37. Die Trapezregel (Sehnentrapezformel) mit $a = 0$, $b = 2$, $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ liefert

dagegen

$$\frac{2}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot e^0 + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-4} \right) \approx 0,877$$

und somit eine bessere Näherung für den Integralwert $\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,882$.



Integrale können mit Obersummen, Untersummen oder der Trapezformel relativ einfach abgeschätzt oder genähert werden, auch wenn eine exakte Berechnung schwierig oder gar unmöglich ist.

Integrale können intervallweise berechnet werden:

Satz 2.1.4 Sei $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a, c]$, wenn f auf beiden Teilintervallen $[a, b]$ und $[b, c]$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

(Additivität des Integrals)

Beispiel: Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1] \\ -2 & \text{für } x \in]1, 2] \end{cases}$$

$f(x)$ ist auf $[0, 1]$ integrierbar mit $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. $f(x)$ ist auf $[1, 2]$ integrierbar mit $\int_1^2 f(x) dx = (-2)(2 - 1) = -2$. Also ist f auch auf $[0, 2]$ integrierbar und

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} + (-2) = -\frac{3}{2}$$

Bei einer Vertauschung der Grenzen erweist sich folgende Konvention als sinnvoll:

Definition 2.1.5 Wenn f auf dem Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$) integrierbar ist, dann definiert man:

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx$$

Diese Konvention ist mit der Additivität verträglich:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$$

Summen und Faktoren können innerhalb oder außerhalb des Integrals gebildet werden (*Linearität* des Integrals):

Satz 2.1.6 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:

(a) Die Funktion $f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar und

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

(Summenregel)

(b) Die Funktion $cf : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar und

$$\int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$$

(Faktorregel)

Beispiel: $f(x) = 2x + 3$ ist auf $[-1, 2]$ integrierbar und

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) \, dx = 2 \int_{-1}^2 x \, dx + 3 \int_{-1}^2 dx = 2 \frac{1}{2} (2^2 - (-1)^2) + 3(2 - (-1)) = 12$$

Integrale verhalten sich außerdem *monoton*:

Satz 2.1.7 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und gelte $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

Der folgende Satz liefert große Klassen integrierbarer Funktionen:

Satz 2.1.8 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

(b) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Man beweist Aussage a) des obigen Satzes, indem man $f(x)$ durch Treppenfunktionen von oben und unten annähert. Für monotone Funktionen (Teil b) zeigt man, dass die Differenz von Ober- und Untersummen mit zunehmender Feinheit nach 0 konvergiert.

Bemerkung 2.1.9 Damit sind fast alle unsere bekannten Funktionen, wie Polynome, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, hyperbolische Funktionen usw. auf Intervallen $[a, b]$ integrierbar. Allerdings darf nicht über Definitionslücken bzw. Polstellen hinweg integriert werden !

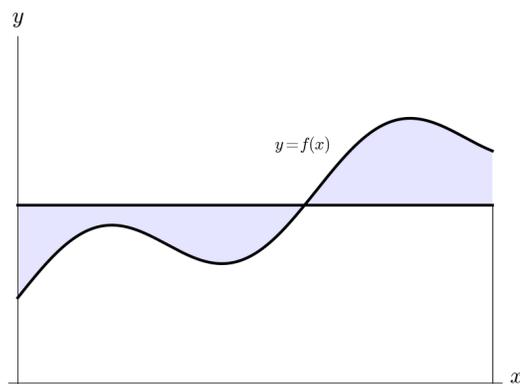


Abbildung 15: Mittelwertsatz der Integralrechnung: Integral von $f(x)$ ist gleich Rechtecksfläche. Die markierten Flächen links und rechts vom Schnittpunkt sind gleich.

Der folgende Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt, dass das Integral stets der orientierten Fläche eines Rechtecks entspricht. Eine Seite dieses Rechtecks ist $[a, b]$ und die Höhe wird durch einen Funktionswert (Mittelwert) gegeben (siehe Abbildung 15).

Satz 2.1.10 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Beweis: Sei

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \text{ und } M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

und daraus folgt:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Also existiert ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\mu(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

Wegen $\mu \in [m, M]$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$ und daraus folgt die Behauptung. \square

Schließlich kommen wir auf den Zusammenhang zwischen Integral und Fläche zurück. Zur Berechnung der (positiven) Fläche wird der Betrag der Funktion integriert.

Satz 2.1.11 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann schließt der Graph von f mit der x -Achse die folgende Fläche ein:

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere integrierbare Funktion. Dann schließen die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ zwischen a und b die folgende Fläche ein:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Falls $f(x) \geq 0$ bzw. $f(x) - g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, so kann der Betrag weggelassen werden. Falls $f(x) < 0$ bzw. $f(x) - g(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, so ist das Integral gleich dem negativen Flächenwert, so dass der Betrag des Integrals die gesuchte Fläche liefert. Etwas schwieriger ist der Fall, dass das Vorzeichen von $f(x)$ bzw. $f(x) - g(x)$ im Intervall $[a, b]$ wechselt. In dem Fall müssen die positiven und negativen Anteile getrennt bestimmt und dann integriert werden. Für stetige Funktionen bestimmt man dazu die Nullstellen, integriert zwischen den einzelnen Nullstellen und wendet dann den Betrag auf die Ergebnisse an.



Für praktische Berechnungen der Fläche zwischen einer Funktion und der x -Achse bzw. der Fläche zwischen zwei Funktionen ist es sinnvoll, zunächst die Nullstellen von $f(x)$ bzw. $f(x) - g(x)$ im Intervall $[a, b]$ zu bestimmen, dann abschnittsweise zwischen dem linken Rand a , den Nullstellen und dem rechten Rand b zu integrieren. Der Betrag kann dann jeweils **nach** der Integration angewendet werden.

Beispiel: $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2x$ (siehe Abbildung 16). Gesucht ist die positive Fläche zwischen den Graphen von f und g . Man bestimmt zunächst die Nullstellen von $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$. Die Nullstellen sind -1 , 0 und 2 . Die Flächen zwischen f und g im Intervall $[-1, 2]$ beträgt dann

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx &= \left| \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx \right| \\ &= \left| \frac{5}{12} \right| + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

(Details zur Berechnung der Integrale im nächsten Abschnitt).

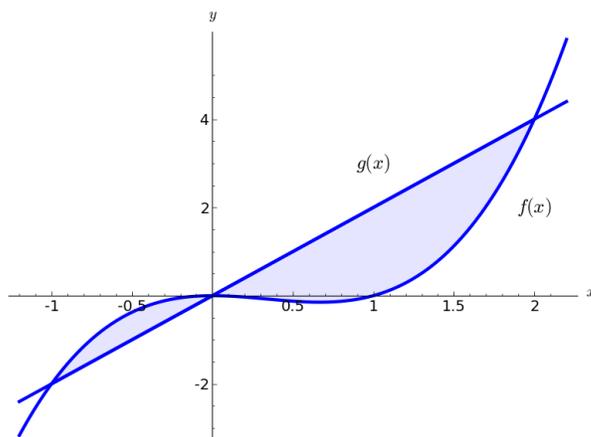


Abbildung 16: Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^3 - x^2$ und $g(x) = 2x$.

2.2 Das unbestimmte Integral und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Während bisher Integrale mit festen Grenzen betrachtet wurden, führen wir nun die *Integralfunktion* ein, die eine variable Integrationsgrenze hat.

Definition 2.2.1 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann definiert man eine Integralfunktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der Funktion f durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Da x nun die obere Grenze bezeichnet, verwenden wir hier t als Integrationsvariable.

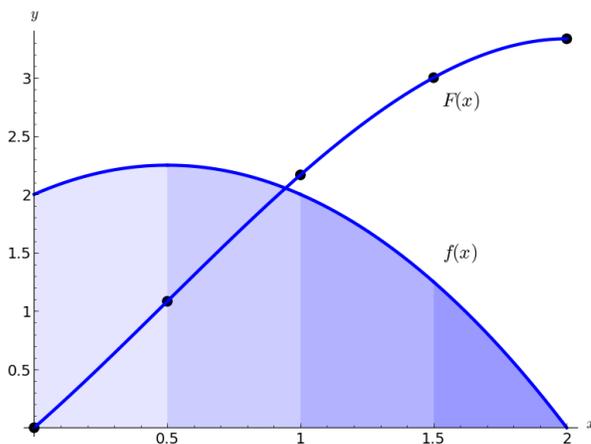


Abbildung 17: Funktion $f(x) = -x^2 + x + 2$ mit Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$. Die Werte von F sind Integrale (Flächen) von f .

Beispiel: $f(x) = x$ ist eine auf beliebigen Intervallen $[a, b]$ integrierbare Funktion. Wählen wir $x_0 = 0$, so erhalten wir folgende Integralfunktion F :

$$F(x) = \int_0^x t \, dt = \frac{1}{2}x^2$$

Hier gilt also $F'(x) = f(x)$. Dieser Zusammenhang gilt allgemein, wie wir später sehen werden.

Die Integralfunktion hängt zunächst von der Wahl des Bezugspunktes x_0 ab. Es gilt aber:

Satz 2.2.2 Sei f auf $[a, b]$ integrierbar und F_1, F_2 zwei Integralfunktionen. Dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion.

Beweis: Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ zwei Bezugspunkte und

$$F_1(x) = \int_{x_1}^x f(t) \, dt \text{ und } F_2(x) = \int_{x_2}^x f(t) \, dt$$

zwei Integralfunktionen. Dann gilt:

$$F_1(x) - F_2(x) = \int_{x_1}^x f(t) \, dt - \int_{x_2}^x f(t) \, dt = \int_{x_1}^x f(t) \, dt + \int_x^{x_2} f(t) \, dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt$$

Das letzte Integral ist aber von x unabhängig, also eine Konstante. \square

Satz 2.2.3 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine auf $]a, b[$ differenzierbare und auf $[a, b]$ stetige Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f , falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a, b[$.

Bemerkung 2.2.4 Wir wissen bereits (Mathematik 1, Kapitel Differentialrechnung), dass Stammfunktionen bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind.

Beispiel: $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$ und $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$ sind Stammfunktionen zu $f(x) = x^2$.

Der folgende *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* besagt, dass Integralfunktionen Stammfunktionen sind:

Satz 2.2.5 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist jede Integralfunktion

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) \, dt$$

(mit $x_0 \in [a, b]$) eine Stammfunktion zu f , d.h. es gilt insbesondere: $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a, b[$.

Beweis: Für $h \neq 0$ gilt:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t) dt \right)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$, falls $h < 0$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h)h$$

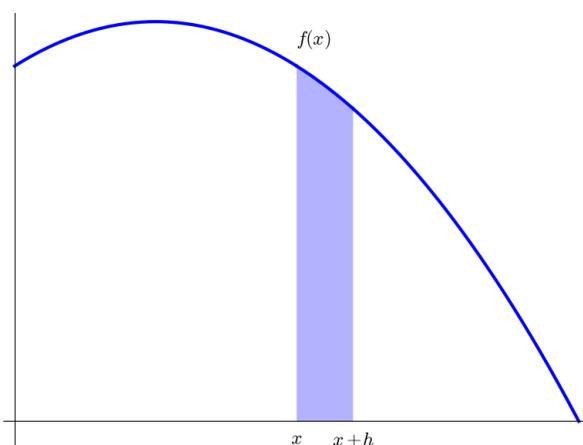


Abbildung 18: Nach Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt $\int_x^{x+h} f(t) dt \approx f(x) \cdot h$.

(siehe Abbildung 18). Dann folgt für die Ableitung von F :

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(\xi_h)h = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x)$$

Aus der rechts- bzw. linksseitigen Differenzierbarkeit bei a bzw. b folgt auch die Stetigkeit auf $[a, b]$. \square

Mit Hilfe von Stammfunktionen können daher Integrale berechnet werden:

Satz 2.2.6 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion zu f . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Sei zunächst F_0 die Integralfunktion

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Dann gilt:

$$F_0(a) = 0 \text{ und } F_0(b) = \int_a^b f(x) dx$$

Da $F(x)$ und $F_0(x)$ nach dem vorigen Hauptsatz beide die Ableitung $f(x)$ haben, folgt:

$$F(x) = F_0(x) + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Wegen $F_0(a) = 0$ gilt $C = F(a)$. Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = F_0(b) = F(b) - C = F(b) - F(a) \quad \square$$

Bezeichnung:

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

Statt $[F(x)]_a^b$ schreibt man auch $F(x)\Big|_a^b$.

Damit lassen sich Integrale bequem durch Einsetzen der Integrationsgrenzen berechnen, sofern man eine Stammfunktion angeben kann. Die Stammfunktion erhält man durch "Umkehrung" der Differentiation. Dafür existieren eine Reihe von Verfahren, aber anders als bei der Ableitung kein allgemein gültiges Schema.

Beispiele:

- (a) $f(x) = x^s$, $s \neq -1$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{s+1}x^{s+1}$ eine Stammfunktion, denn $F'(x) = x^s$. Also gilt z.B.

$$\int_1^2 (6x^2 + 2x - 1) dx = [2x^3 + x^2 - x]_1^2 = (16 + 4 - 2) - (2 + 1 - 1) = 16$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

- (b) $f(x) = \sin(x)$. Dann ist $F(x) = -\cos x$ eine Stammfunktion. Es gilt z.B.

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

- (c) $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \neq 0$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$ eine Stammfunktion, denn $F'(x) = e^{\alpha x}$. Also gilt z.B.

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}$$

- (d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dann ist $F(x) = \arctan(x)$ eine Stammfunktion und es gilt z.B.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Zu einer stetigen Funktion f gibt es stets unendliche viele Stammfunktionen (Integralfunktionen), die sich jeweils um eine Konstante unterscheiden. Die Menge der Stammfunktionen heisst auch *unbestimmtes Integral*.

Definition 2.2.7 Die Menge aller Stammfunktionen einer integrierbaren Funktion f bezeichnet man als *unbestimmtes Integral* und schreibt

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von f und $C \in \mathbb{R}$ ist.

Beispiel:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

2.3 Grundintegrale

Das unbestimmte Integral einer Funktion kann einfach mit Hilfe einer Stammfunktion angegeben werden. Es gilt (s.o.):

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ wobei } F'(x) = f(x)$$

Eine differenzierbare Funktion f ist Stammfunktion ihrer Ableitung f' . Daher gilt:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Zur Bestimmung von unbestimmten Integralen bzw. Stammfunktionen kann man also Tabellen mit Funktionen und ihren Ableitungen verwenden und sie umgekehrt ablesen. Auf diese Weise erhält man Grund- oder Stammintegrale:

Satz 2.3.1 Die folgende Tabelle enthält einige Grundintegrale und den Definitionsbereich der Funktionen und ihrer Stammfunktionen:

| | |
|--|---|
| $\int f(x) dx = F(x) + C$ | $D_f = D_F$ |
| $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ für $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ | \mathbb{R} bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $\int x^s dx = \frac{1}{s+1}x^{s+1} + C$ für $s \in \mathbb{R}, s \neq -1$ | $]0, \infty[$ |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\int e^x dx = e^x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ für $a > 0$ | \mathbb{R} |
| $\int \sinh x dx = \cosh x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int \cosh x dx = \sinh x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ | $] -1, 1[$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$ | \mathbb{R} |
| $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + C$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |

2.4 Partielle Integration

Bisher sind neben den Grundintegralen nur die elementaren Integrationsregeln bekannt (siehe 2.1.6). In diesem und den folgenden Abschnitten werden weitere Integrationsverfahren eingeführt.

Die partielle Integration kann man als Pendant der Produktregel der Differentiation ansehen.

Satz 2.4.1 *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

bzw. für die unbestimmten Integrale gilt:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Beweis: Man differenziert nach Produktregel die Funktion $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Dann gilt:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integriert man diese Funktionen so erhält man:

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Da fg eine Stammfunktion zu $(fg)'$ ist, folgt

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

und daraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.4.2 Die partielle Integration liefert keine geschlossene Lösungsmethode für Integrale von Produkten von Funktionen, sondern führt lediglich auf ein anderes Integral, das sich vielleicht besser lösen lässt.

Beispiele:

(a) $\int xe^x dx$. Man setzt $f(x) = x$ und $g(x) = e^x$ und erhält $f'(x) = 1$, $g'(x) = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

(b) $\int_1^e \ln x dx$. Man setzt $f(x) = \ln x$ und $g(x) = x$, so dass $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = 1$. Daraus folgt:

$$\int_1^e \ln x \cdot 1 dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$$

(c) $\int \sin^2(x) dx$. Man setzt $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = -\cos(x)$, so dass $f'(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = \sin(x)$. Also gilt:

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx$$

Nun gilt: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, also

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx = -\sin(x) \cos(x) + x - \int \sin^2(x) dx$$

Daraus folgt durch Umstellen:

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(-\sin(x) \cos(x) + x) + C$$

Es folgt z.B.

$$\int_0^\pi \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt

$$\int \sin^2(x) \, dx + \int \cos^2(x) \, dx = x + C$$

und daher

$$\int \cos^2(x) \, dx = x - \int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) + x) + C$$

2.5 Substitutionsregel

Für die Integration von zusammengesetzten Funktion und beim Wechsel der Integrationsvariablen wird die *Substitutionsregel* (als Pendant zur Kettenregel) angewendet.

Satz 2.5.1 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) \, dt$$

Wenn g eine bijektive Funktion mit $g(c) = a$ und $g(d) = b$ ist, so gilt auch:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) \, dt$$

Für die unbestimmten Integrale gilt:

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(t))g'(t) \, dt$$

Beweis: Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann hat die zusammengesetzte Funktion $(F \circ g)(t) = F(g(t))$ nach der Kettenregel die Ableitung:

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

Also ist die Funktion $F \circ g$ eine Stammfunktion zu $f(g(t))g'(t)$ und es gilt:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx = [F(x)]_{g(c)}^{g(d)} = [F(g(t))]_c^d = \int_c^d f(g(t))g'(t) \, dt$$

Setzt man $c = g^{-1}(a)$ bzw. $d = g^{-1}(b)$, so erhält man

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) \, dt$$

□

Setzt man $x = g(t)$ und verwendet man $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, so erhält man $dx = g'(t) dt$, so dass sich die Substitutionsregel einfach durch symbolische Umformung ergibt. Allerdings ist dies kein Beweis.

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$$

Bemerkung 2.5.2 Praktisch kann man die Substitutionsregel so anwenden: Integriere $\int_a^b f(x) dx$. Eine Stammfunktion zu f sei zunächst nicht bekannt. Substituiere dann $x = g(t)$ für eine geeignete bijektive Funktion g . Dann gilt: $\frac{dx}{dt} = g'(t)$. Man beachte, dass die Grenzen ebenfalls substituiert werden, d.h. die neuen Grenzen sind $t = g^{-1}(a)$ und $t = g^{-1}(b)$. Es gilt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt$$

wobei das neue Integral (von t) ggf. besser bestimmt werden kann.



Nach der Substitution darf nur noch die neue Variable vorkommen, sowohl beim Integranden, dem Differential als auch bei der Angabe der Grenzen. Gemischte Integrale mit zwei Variablen sind hier nicht zulässig, d.h. immer vollständig substituieren!

Beispiel: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Substituiere $x = \sin t = g(t)$. Dann gilt: $\frac{dx}{dt} = \cos t$, also $dx = \cos t dt$. Die neuen Grenzen sind $t = g^{-1}(0) = \arcsin(0) = 0$ und $t = g^{-1}(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Also folgt:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

Nach dem Beispiel zur partiellen Integration erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t \cos t + t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Alternativ löst man zunächst das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(\sin t \cos t + t) + C \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C \end{aligned}$$

Bei der Substitution unbestimmter Integrale ist die Rücksubstitution in die ursprüngliche Variable x unbedingt erforderlich. Man beachte: $x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x$ und $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$. Nun berechnet man mit der Hilfe des gelösten unbestimmten Integrals das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \arcsin(1) = \frac{\pi}{4}$$



Bei bestimmten Integralen entweder bei jeder Substitution die Integrationsgrenzen anpassen oder erst das unbestimmte Integral lösen und dann die ursprünglichen Grenzen einsetzen. Bei unbestimmten Integralen immer am Ende in die ursprüngliche Variable zurücksostituieren!

Bemerkung 2.5.3 Häufig wird die Substitutionsregel in umgekehrter Richtung angewendet: ein von x abhängiger Term $h(x)$ in einem Integral der Form $\int_a^b f(h(x)) \, dx$ wird durch eine neue Variable $z = h(x)$ ersetzt. Dann gilt: $\frac{dz}{dx} = h'(x)$, also $dx = \frac{dz}{h'(x)} = \frac{dz}{h'(h^{-1}(z))}$. Die neuen Grenzen sind $z = h(a)$ und $z = h(b)$. Es gilt dann:

$$\int_a^b f(h(x)) \, dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(z) \frac{1}{h'(h^{-1}(z))} \, dz$$

Das neue Integral (von z) lässt sich ggf. einfacher bestimmen als das ursprüngliche Integral (von x). Der komplizierte Faktor $\frac{1}{h'(h^{-1}(z))}$ verschwindet übrigens, falls im ursprünglichen Integranden $f(h(x))h'(x)$ steht:

$$\int_a^b f(h(x))h'(x) \, dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(z) \, dz$$

Beispiel: $\int_1^3 \frac{2x^2}{1-3x^3} \, dx$. Substituiere $z = h(x) = 1 - 3x^3$. Dann gilt: $\frac{dz}{dx} = -9x^2$ bzw. $dx = \frac{dz}{-9x^2}$. Die neuen Grenzen sind $z = h(1) = -2$ und $z = h(3) = -80$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{2x^2}{1-3x^3} \, dx &= \int_{-2}^{-80} \frac{2x^2}{z} \cdot \frac{1}{-9x^2} \, dz = \int_{-2}^{-80} \frac{-2}{9} \cdot \frac{1}{z} \, dz = \left[\frac{-2}{9} \ln(|z|) \right]_{-2}^{-80} \\ &= -\frac{2}{9}(\ln(80) - \ln(2)) = -\frac{2}{9} \ln(40) \end{aligned}$$

Alternativ löst man das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x^2}{1-3x^3} dx = \frac{-2}{9} \ln(|z|) + C = \frac{-2}{9} \ln(|1-3x^3|) + C$$

und erhält für das bestimmte Integral:

$$\int_1^3 \frac{2x^2}{1-3x^3} dx = \left[\frac{-2}{9} \ln(|1-3x^3|) \right]_1^3 = -\frac{2}{9} (\ln(80) - \ln(2)) = -\frac{2}{9} \ln(40)$$

Weitere Beispiele:

- (a) $\int e^{x^2} x dx$. Substituiere $z = x^2$. Daraus folgt: $\frac{dz}{dx} = 2x$, bzw. $dx = \frac{1}{2x} dz$.
Dann erhält man

$$\int e^{x^2} x dx = \int e^z \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} e^z + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

- (b) $\int x\sqrt{1-x} dx$. Substituiere $z = 1-x$. Dann gilt: $dz = -dx$, $x = 1-z$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x} dx &= \int -(1-z)\sqrt{z} dz = \int (-z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}) dz \\ &= -\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$



Es gibt keine allgemeinen Rezepte, welche Substitution anzuwenden ist. Man beachte, dass durch eine Substitution bei der Ersetzung der Differentiale Ableitungen entstehen, die die Situation manchmal noch verschlechtern. Eventuell verschiedene Möglichkeiten ausprobieren! Lineare Substitutionen $z = ax + b$ sind aber stets unproblematisch, da die Ableitung eine Konstante ist.

Bemerkung 2.5.4 Folgende allgemeine Formeln gelten:

- (a) $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ (lineare Substitution $z = ax+b$),
wobei $F(x)$ eine Stammfunktion zu f sei, z.B.

$$\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

- (b) $\int f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C$, wobei $f(x)$ stetig differenzierbar, z.B.

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

(c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$, wobei $f(x)$ stetig differenzierbar und $\neq 0$, z.B.

$$\int \cot(x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$$

(d) $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$, wobei $g(x)$ stetig differenzierbar und $F(x)$ eine Stammfunktion zu f sei, z.B.

$$\int \sin(x^2 + 1)2x dx = -\cos(x^2 + 1) + C$$

2.6 Partialbruchzerlegung

Mit Hilfe einer Polynomdivision kann man jede gebrochen rationale Funktion in eine Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion zerlegen. In diesem Abschnitt sollen nun Methoden für die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen entwickelt werden.

Bestimmte gebrochen rationale Funktionen können bereits mit Hilfe von Grundintegralen oder einer Substitution integriert werden:

(a) $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| + C$, für $a \in \mathbb{R}$

(b) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$, für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

(c) $\int \frac{1}{(x-a)^2+b} dx$ für $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Dies formt man um zu:

$$\int \frac{1}{b} \frac{1}{\frac{1}{b}(x-a)^2+1} dx = \int \frac{1}{b} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2+1} dx$$

Mit der Substitution $z = \frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{a}{\sqrt{b}}$, $dx = \sqrt{b} dz$, erhält man

$$\int \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan(z) + C = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{a}{\sqrt{b}}\right) + C$$

(d) $\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b} dx = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b) + C$

Allerdings lässt sich z.B. $\int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx$ so nicht bestimmen. Die Idee der Partialbruchzerlegung ist nun, solche Funktionen in eine **Summe** von elementaren Partialbrüchen zu zerlegen. Diese können dann einzeln integriert werden.

Beispiel: $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

Dann gilt für die Zählerpolynome:

$$1 = A(x - 3) + B(x - 1)$$

Diese Gleichung gilt für alle x . Durch Einsetzen von $x = 3$ erhält man $1 = 2B$, also $B = \frac{1}{2}$ und durch Einsetzen von $x = 1$: $1 = -2A$, also $A = -\frac{1}{2}$. Insgesamt erhält man daher:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = \int \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + C$$

Satz 2.6.1 Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine **echt gebrochen rationale Funktion**, d.h. $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$. Dann lässt sich $f(x)$ über \mathbb{R} in eine Linearkombination von Brüchen des folgenden Typs zerlegen, wobei $a, b, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ und $b > 0$:

(a) $\frac{1}{x-a}$

(b) $\frac{1}{(x-a)^2}, \frac{1}{(x-a)^3}, \text{ usw.}$

(c) $\frac{1}{(x-a)^2+b}$

(d) $\frac{x-a}{(x-a)^2+b}$

(e) $\frac{\alpha_2 x + \beta_2}{((x-a)^2+b)^2}, \frac{\alpha_3 x + \beta_3}{((x-a)^2+b)^3}, \text{ usw.}$

Ergänzung: Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gekürzte Darstellung. Die o.a. Summanden treten dann in folgenden Situationen auf:

- Wenn $q(x)$ einen Linearfaktor $(x - a)$ enthält \rightarrow Typ a)
- Wenn $q(x)$ den Linearfaktor $(x - a)^n$ enthält \rightarrow zusätzliche die Summanden vom Typ b) bis einschließlich der n -ten Potenz
- Wenn $q(x)$ ein Polynom zweiten Grades ohne reelle Nullstellen enthält \rightarrow Typen c) und/oder d)
- Wenn $q(x)$ ein Polynom zweiten Grades ohne reelle Nullstellen in der n -ten Potenz enthält \rightarrow zusätzlich Summanden des Typs e) bis einschließlich der n -ten Potenz (dieser Typ wird hier nicht weiter betrachtet)

Bemerkung 2.6.2 Über den komplexen Zahlen ist die Partialbruchzerlegung einfacher. Da sich jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen lässt (siehe Satz 1.2.1), kommen bei der Zerlegung nur Partialbrüche des Typs a) und b) vor.

Beispiele:

- (a) $\int \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$. Man zerlegt zunächst das Nennerpolynom:
 $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$. Der Ansatz ist dann:

$$\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x - 2} + \frac{B_2}{(x - 2)^2}$$

Multipliziert man die Gleichung mit dem Nenner $x(x - 2)^2$, so erhält man die folgende Gleichung für die Zählerpolynome:

$$1 = A(x - 2)^2 + B_1x(x - 2) + B_2x$$

Nun kann man entweder Koeffizientenvergleich durchführen (die Konstanten sowie die Koeffizienten von x und x^2 müssen links und rechts vom Gleichheitszeichen übereinstimmen) oder man setzt x -Werte ein. Man beachte, dass diese Gleichung für alle x gilt. Setzt man $x = 2$, so erhält man $1 = 2B_2$, also $B_2 = \frac{1}{2}$. Mit $x = 0$ ergibt sich $1 = 4A$, also $A = \frac{1}{4}$. Zur Bestimmung von B_1 wählen wir einen weiteren Punkt, z.B. $x = 1$. Daraus folgt:

$$1 = A - B_1 + B_2 = \frac{3}{4} - B_1 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{4}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x - 2)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x - 2| - \frac{1}{2} \frac{1}{x - 2} + C \end{aligned}$$

- (b) $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 13} dx$. Das Nennerpolynom besitzt keine reellen Nullstellen, es gilt:

$$x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$$

Der Ansatz ist

$$\frac{x}{x^2 + 4x + 13} = \frac{A}{(x + 2)^2 + 9} + \frac{B(x + 2)}{(x + 2)^2 + 9}$$

Daraus folgt: $x = A + B(x + 2) = A + 2B + Bx$, also $B = 1$ und $A = -2$ und für das Integral gilt:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 4x + 13} dx &= \int \left(-\frac{2}{(x + 2)^2 + 9} + \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + 9} \right) dx \\ &= -\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} \ln((x + 2)^2 + 9) + C \end{aligned}$$

Exkurs: Wählt man einen komplexen Ansatz für die Partialbruchzerlegung, so ergibt sich: $x^2 + 4x + 13 = (x + 2 + 3j)(x + 2 - 3j)$ und daher der Ansatz

$$\frac{x}{x^2 + 4x + 13} = \frac{A}{x + 2 + 3j} + \frac{B}{x + 2 - 3j}$$

Daraus folgt:

$$x = A(x + 2 - 3j) + B(x + 2 + 3j)$$

Setzt man $x = -2 - 3j$, so erhält man $-2 - 3j = A(-6j)$, also $A = -\frac{-2-3j}{-6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$. Setzt man $x = -2 + 3j$, so erhält man $-2 + 3j = B(6j)$, also $B = \frac{-2+3j}{6j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$. Verwendet man dies zur Integration, so erhält man zunächst komplexe ln-Funktionen, die man für reelle x durch reelle Funktionen wie oben ausdrücken kann.

2.7 Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt werden Integrale mit uneigentlichen Grenzen (d.h. $\pm\infty$) und Integrale über Funktionen mit Polstellen eingeführt.

Beispiel: Eine positive Punktladung Q befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Im Abstand r_0 befinde sich ein negativ geladenes Teilchen der Ladung Q_1 . Welche Energie ist erforderlich um das Teilchen auf den Abstand $r_1 > r_0$ zu bringen und sogar komplett aus dem elektrischen Feld zu entfernen?

Die Feldstärke im Abstand r von der Punktladung ist:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{r^2}$$

wobei $\epsilon_0 \approx 8.85410^{-12} \frac{As}{Vm}$ die elektrische Feldkonstante ist. Die Arbeit, die bei Bewegung von r_0 nach r_1 verrichtet werden muß, ist:

$$\begin{aligned} W &= -Q_1 \int_{r_0}^{r_1} E \, dr = -Q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^2} \, dr \\ &= -\frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r_1} = -\frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

Für die komplette Entfernung aus dem Feld betrachtet man $r_1 \rightarrow \infty$ und erhält:

$$W = -\frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Definition 2.7.1 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und f eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, x]$ mit $x > a$ (bzw. $[x, b]$ mit $x < b$) integrierbar ist. Dann nennt man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt \text{ bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt$$

das *uneigentliche Integral* von f über $[a, \infty[$ bzw. $] -\infty, b]$ und schreibt dafür

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ bzw. } \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Falls der Grenzwert als reelle Zahl existiert, nennt man das *uneigentliche Integral* konvergent, ansonsten heißt es *divergent*. Uneigentliche Integrale über ganz \mathbb{R} werden gemäß

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

definiert (für $a \in \mathbb{R}$ beliebig). Dieses Integral heißt *konvergent*, falls beide Summanden konvergent sind.

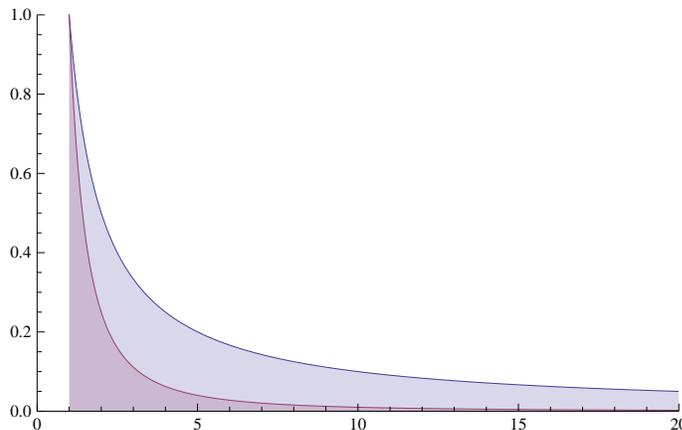


Abbildung 19: Das uneigentliche Integral von $\frac{1}{x^2}$ über $[1, \infty[$ existiert (innere Fläche), das Integral von $\frac{1}{x}$ ist divergent (äußere Fläche).

Beispiele:

- (a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$. Das uneigentliche Integral ist also konvergent (siehe Abbildung 19).
- (b) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$. Das uneigentliche Integral ist divergent (siehe Abbildung 19).
- (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\arctan t]_x^0 + \lim_{x \rightarrow \infty} [\arctan t]_0^x = \pi$. Das uneigentliche Integral ist

konvergent, die Gesamtfläche unter dem Graphen von $\frac{1}{1+x^2}$ ist endlich und gleich π .

Eine zweite Art von uneigentlichen Integralen gibt es bei Funktionen, die im Integrationsintervall eine Polstelle haben oder in der Umgebung einer Stelle unbeschränkt und daher zunächst nicht integrierbar sind.

Definition 2.7.2 *f sei auf $D_f = [a, b] \setminus \{x_0\}$ definiert und auf allen abgeschlossenen Intervallen innerhalb von D integrierbar. Dann definiert man das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$ wie folgt:*

$$(a) \text{ Falls } x_0 = a: \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

$$(b) \text{ Falls } x_0 = b: \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

$$(c) \text{ Falls } x_0 \in]a, b[: \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_a^x f(t) dt + \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_x^b f(t) dt$$

Falls der (oder die) Grenzwert(e) als reelle Zahl existieren, nennt man das uneigentliche Integral konvergent, ansonsten heißt es divergent.

Beispiele:

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2t^{\frac{1}{2}}]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{x}) = 2$. Das uneigentliche Integral über $[0, 1]$ ist also konvergent (siehe Abbildung 20).

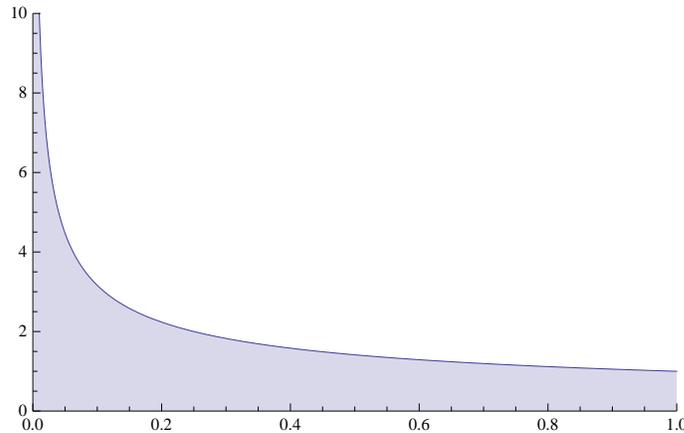


Abbildung 20: Das uneigentliche Integral von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ über $[0, 1]$ existiert, obwohl $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$. Da die Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ unbeschränkt ist, und insbesondere nicht stetig ist, darf man hier nicht die Stammfunktion $-\frac{1}{x}$ in

den Grenzen einsetzen! Für das uneigentliche Integral berechnet man:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-1}^x \frac{1}{t^2} dt + \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^2} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{t} \right]_{-1}^x + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{t} \right]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} - 1 \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Die Grenzwerte existieren nicht, das Integral ist divergent.

2.8 Fourier-Reihen

$\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ sind $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -periodische Standardschwingungen. Ist es möglich, eine beliebige T -periodische Funktionen f als Linearkombination von solchen Schwingungen darzustellen? Dabei ist zu berücksichtigen, dass auch die Schwingungen mit mehrfacher Kreisfrequenz $n\omega$ sowie die konstanten Funktionen T -periodisch sind. Man sucht daher eine Darstellung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

Die reellen Koeffizienten a_n und b_n heißen *Fourier-Koeffizienten*. $\frac{a_0}{2}$ ist der konstante Anteil, die Terme mit den Koeffizienten a_1 und b_1 gehören zur Grundschwingung mit Kreisfrequenz ω , a_2 und b_2 zur Oberschwingung mit Kreisfrequenz 2ω usw. Die Folge der Werte

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right|, A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \dots$$

liefert das *Amplitudenspektrum* von f , das die Größe der einzelnen Frequenzanteile beschreibt. Neben der reellen betrachtet man häufig auch die komplexe Darstellung mit komplexen Fourier-Koeffizienten c_n :

$$f(t) = \dots c_{-2} e^{-j2\omega t} + c_{-1} e^{-j\omega t} + c_0 + c_1 e^{j\omega t} + c_2 e^{j2\omega t} + \dots$$

Falls f bereits als Summe von trigonometrischen Funktionen gegeben ist, lassen sich die Fourierkoeffizienten und das Amplitudenspektrum direkt ablesen.

Beispiel: $f(t) = 6 - 2 \sin(8\pi t) + 3 \cos(8\pi t) + \cos(24\pi t)$. Dann ist die Grundfrequenz $\omega = 8\pi$, also $T = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$. Man liest dann ab: $\frac{a_0}{2} = 6$, d.h. $a_0 = 12$, $a_1 = 3$, $b_1 = -2$, $a_3 = 1$ und alle weiteren Koeffizienten sind gleich 0. Das Amplitudenspektrum sind $A_0 = 6$, $A_1 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1$ und alle weiteren Amplituden sind gleich 0.

Im Allgemeinen ist f aber nicht als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen gegeben. Dann müssen die Fourier-Koeffizienten von f durch Integration bestimmt werden (s.u.). In der Praxis verwendet man häufig Abtastwerte der Funktion (Übergang von einer kontinuierlichen Funktion zu einem Datenvektor) und effiziente numerische Verfahren, insbesondere die *Fast Fourier Transform* (FFT). Zur Berechnung der diskreten Fourier-Koeffizienten vergleiche man auch das Anwendungsbeispiel zu Definition 4.7.1.

Definition 2.8.1 Sei f eine auf $[0, T]$ integrierbare T -periodische Funktion. Dann definiere die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n durch:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \geq 1)$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die zugehörige Kreisfrequenz ist. Statt über $[0, T]$ kann auch über das symmetrische Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ integriert werden.

Man ordnet dann f die folgende Fourier-Reihe zu:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Satz 2.8.2 Für eine gerade Funktion sind alle Sinusglieder gleich 0, d.h. es gilt $b_n = 0$. Für eine ungerade Funktion sind die Cosinusglieder gleich 0, d.h. es gilt $a_n = 0$.

Beweis: Für eine gerade Funktion $f(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin(n\omega t) dt &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(-t) (-1) \sin(n\omega(-t)) dt = \\ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin(n\omega t) dt &= -\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \end{aligned}$$

so dass sich die beiden Integrale von $-\frac{T}{2}$ bis 0 bzw. von 0 bis $\frac{T}{2}$ aufheben.

Für eine ungerade Funktion $f(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega t) dt &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -f(-t) \cos(n\omega(-t)) dt = \\ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega t) dt &= -\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \end{aligned}$$

und die Integrale von $-\frac{T}{2}$ bis 0 bzw. von 0 bis $\frac{T}{2}$ heben sich auf. \square

In welchen Fällen stimmt die Fourierreihe mit der ursprünglichen Funktion überein? Die punktweise Übereinstimmung (d.h. für ein festes t) erweist sich als schwieriges Problem. Der Satz von Dirichlet liefert eine positive Antwort für stetig differenzierbare Funktionen:

Satz 2.8.3 (Dirichlet) Sei f eine stückweise stetig differenzierbare T -periodische Funktion. Dann stimmt f an den stetigen Stellen mit ihrer Fourier-Reihe überein, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert dort punktweise gegen f .

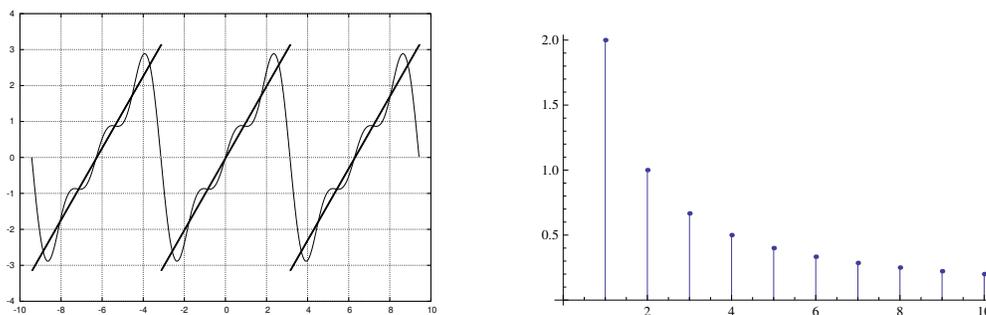


Abbildung 21: Sägezahnfunktion und ihre Approximation durch die ersten drei Glieder der Fourier-Reihe (links) sowie das Amplitudenspektrum der Sägezahnfunktion (rechts).

Es existieren allgemeine Versionen dieses Satzes, die wir hier nicht betrachten.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Sägezahnfunktion mit

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{für } t = \pi \end{cases}$$

und einer $T = 2\pi$ -periodischen Fortsetzung (siehe Abbildung 21). Die Kreisfrequenz ist $\omega = 1$. Es handelt sich um eine ungerade Funktion, so dass die Cosinusglieder a_n wegfallen. Für die Fourier-Koeffizienten b_n gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-t \frac{1}{n} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nt) \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-t \frac{1}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Fourier-Reihe von f :

$$\frac{2}{1} \sin(t) - \frac{2}{2} \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t) \mp \dots = 2 \left(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) \mp \dots \right)$$

Das Amplitudenspektrum von f lässt sich daraus ablesen:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{2}{n}, \quad \dots$$

Die Fourier-Reihe konvergiert wegen Satz 2.8.3 zunächst für alle $t \neq n\pi$ gegen die Sägezahnfunktion f , und für $t = n\pi$ gegen den Funktionswert 0 (da dann alle Terme der Fourier-Reihe Null sind).

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Viele Zusammenhänge in Natur und Technik sind durch sogenannte *gewöhnliche Differentialgleichungen* gegeben, in der neben einer Variablen (z.B. x) auch Funktionen und ihre Ableitungen (z.B. $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$) auftreten. Gesucht ist eine Funktion $y(x)$, welche die Gleichung für alle zulässigen x erfüllt.

3.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 3.1.1 Eine explizite Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung ist gegeben durch eine Gleichung

$$y'(x) = f(x, y)$$

wobei $f(x, y)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen x, y ist. Eine differenzierbare Funktion $y = y(x)$ heißt Lösung der DGL, falls sie die Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle zulässigen x erfüllt.

$y = y(x)$ ist Lösung des Anfangswertproblems (AWP), falls y zusätzlich eine vorgeschriebene Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

Eine DGL $y'(x) = f(x, y)$ kann mit Hilfe ihres *Richtungsfelds* (siehe Abbildung 22) geometrisch interpretiert werden. Dabei gibt $f(x, y)$ die Steigung im Punkt (x, y) an und es wird eine differenzierbare Funktion $y(x)$ mit der gegebenen Steigung gesucht. Die Funktion hängt von der Wahl einer Anfangsbedingung ab, d.h. von der Festlegung eines Punktes (x_0, y_0) .

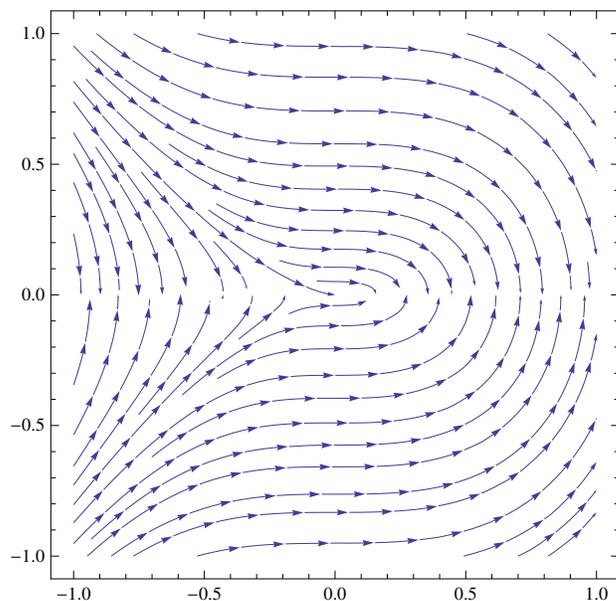


Abbildung 22: Richtungsfeld zur Differentialgleichung $y'(x) = -\frac{x^2}{y}$

Anfangswertprobleme für DGL erster Ordnung werden (bei geeigneten Voraussetzungen an $f(x, y)$) durch eine eindeutige Funktion $y = y(x)$ gelöst (Existenz- und Eindeigkeitssatz); dies soll hier aber nicht weiter besprochen werden. Wir interessieren uns insbesondere für Lösungsverfahren von DGL. Wir betrachten zwei Verfahren, die Lösungen für spezielle Typen von DGL erster Ordnung liefern: DGL mit trennbaren Variablen und lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

3.2 DGL erster Ordnung mit trennbaren Variablen

Eine DGL erster Ordnung vom Typ $y' = f(x)g(y)$ hat *trennbare Variablen*. Solche DGL können häufig durch Integration gelöst werden:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Man erhält auf der linken Seite eine Funktion von y , auf der rechten Seite eine Funktion von x (plus Integrationskonstante). Kann man die Gleichung nach y auflösen, so erhält man die Lösung der DGL. Die Integrationskonstante erhält man durch Einsetzen der Anfangsbedingung.

Beispiel: $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)}$. Es folgt: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y}$, also $y dy = -x^2 dx$.
Integration ergibt:

$$\int y dy = \int -x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + C}$$

Setzt man als Anfangsbedingung z.B. $y(0) = \frac{1}{2}$ so folgt $\frac{1}{2} = \sqrt{C}$, also $C = \frac{1}{4}$, so dass man die folgende Lösung des AWP erhält:

$$y = y(x) = \sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}}$$

Diese Funktion liegt auf dem Richtungsfeld der DGL und erfüllt $f(0) = \frac{1}{2}$ (siehe Abbildungen 22 und 23).

3.3 Lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine DGL vom Typ $y' = \alpha y + \beta(x)$ heißt *lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten*.

Beispiel: (Spannung beim Aufladen eines Kondensators, siehe Abbildung 24). U_0 , R und C sind gegeben (Konstanten), die Funktion $U_C(t)$ (Spannung am Kondensator) ist gesucht. Dann gilt:

$$U_0 = I(t)R + U_C(t) = Q'(t)R + U_C(t) = CU_C'(t)R + U_C(t)$$

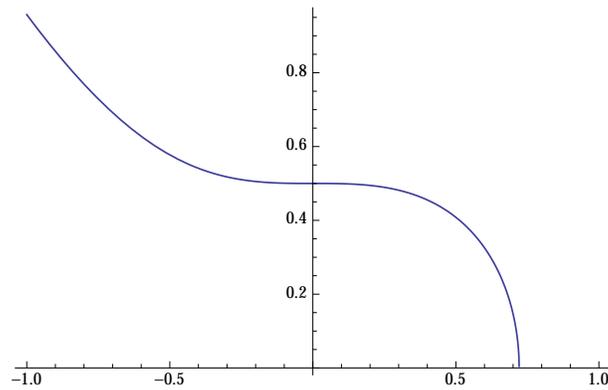


Abbildung 23: $y = \sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}}$ ist Lösung des AWP $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)}$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Dies ist eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die man explizit so schreiben kann:

$$U_C'(t) = -\frac{1}{RC}U_C(t) + \frac{U_0}{RC}$$

Mit der Anfangsbedingung $U_C(0) = 0$ (Kondensator entladen bei $t = 0$) kann die DGL gelöst werden, d.h. $U_C(t)$ bestimmt werden:

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

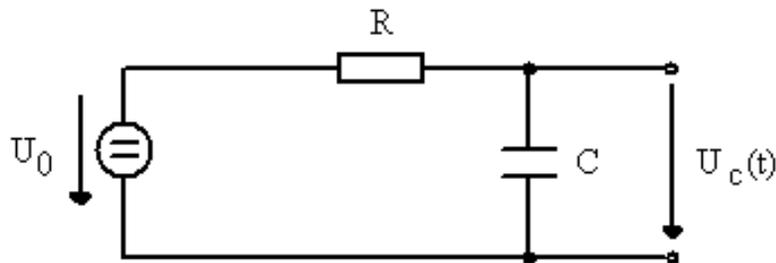


Abbildung 24: RC-Schaltkreis

Definition 3.3.1 Eine explizite lineare Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist durch eine Gleichung

$$y'(x) = \alpha y(x) + \beta(x)$$

gegeben, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta(x)$ eine reellen Störfunktion ist. Falls $\beta = 0$ gilt, spricht man von einer homogenen DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Der folgende Satz gibt die Lösungen dieser Differentialgleichungen an:

Satz 3.3.2 (a) Die homogene lineare DGL erster Ordnung $y'(x) = \alpha y(x)$ mit konstantem Koeffizient $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt die Lösungen

$$y(x) = Ce^{\alpha x}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die eindeutige Lösung des AWP

$$y'(x) = \alpha y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ist $y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)} = (y_0 e^{-\alpha x_0}) e^{\alpha x}$.

(b) Die Lösungen der inhomogenen linearen DGL erster Ordnung $y'(x) = \alpha y(x) + \beta(x)$ ergeben sich als Summe der homogenen Lösungen $Ce^{\alpha x}$ und einer speziellen Lösung. Man erhält eine spezielle Lösung durch einen Ansatz, der von $\beta(x)$ abhängt. Die unbekanntenen Koeffizienten werden durch Einsetzen in die DGL bestimmt.

| Störfunktion $\beta(x)$ | Ansatz |
|--|--|
| $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ | $A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m$ |
| $(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) e^{ux}$ | $(A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) e^{ux}$ falls $u \neq \alpha$ $x(A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) e^{ux}$ falls $u = \alpha$ |
| $(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) \cdot \cos(\omega x)$ | $(A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) \cos(\omega x)$ $+ (B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) \sin(\omega x)$ |
| $(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) \cdot \sin(\omega x)$ | $(A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) \cos(\omega x)$ $+ (B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) \sin(\omega x)$ |

Beweis: (für die homogene DGL $y'(x) = \alpha y$). Es gilt: $\frac{y'}{y} = \alpha$ und Integration liefert $\int \frac{1}{y} dy = \int \alpha dx + C$ so dass $\ln(y) = \alpha x + C$, also $y = e^{\alpha x + C} = e^C e^{\alpha x}$.

Beispiel: AWP $y'(x) = 5y(x) + x$, $y(1) = 1$.

1. Schritt: Lösung des homogenen Systems $y' = 5y$.

$$y(x) = Ce^{5x}$$

2. Schritt: Der Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist:

$$y(x) = A_0 + A_1 x$$

Durch Einsetzen in die DGL erhalten wir:

$$A_1 = 5(A_0 + A_1 x) + x \iff A_1 - 5A_0 = x(5A_1 + 1)$$

Da diese Gleichung für alle x gilt, so folgt: $A_1 - 5A_0 = 0$ und $5A_1 + 1 = 0$. Hieraus folgt: $25A_0 + 1 = 0$, d.h. $A_0 = -\frac{1}{25}$ und $A_1 = -\frac{1}{5}$. Als spezielle Lösung erhalten wir also:

$$y(x) = -\frac{1}{25} - \frac{1}{5}x$$

3. Schritt: Die Lösung der DGL ist die Summe aus der Lösung des homogenen Systems und der speziellen Lösung:

$$y(x) = Ce^{5x} - \frac{1}{25} - \frac{1}{5}x$$

4. Schritt: Lösung des AWP durch Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

$$1 = Ce^5 - \frac{6}{25} \iff C = \frac{31}{25}e^{-5}$$

Die Lösung des AWP ist dann schließlich:

$$y(x) = \frac{31}{25e^5}e^{5x} - \frac{1}{25} - \frac{1}{5}x$$

3.4 Lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Falls eine DGL neben der ersten auch die zweite Ableitung enthält, so ist dies eine DGL *zweiter Ordnung*.

Beispiel: Für einen elektrischen Serien-Schwingkreis mit Kondensator, Widerstand und Spule (siehe Abbildung 25) gilt:

$$U(t) = U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = \frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t)$$

Durch Ableiten folgt:

$$U'(t) = LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t)$$

wobei $I(t)$ gesucht ist.

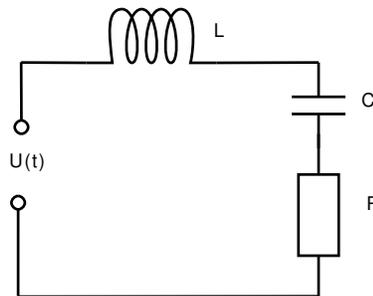


Abbildung 25: Serien-Schwingkreis

Definition 3.4.1 Eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist durch eine Gleichung

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = \gamma(x)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und eine reellen Störfunktion $\gamma(x)$ gegeben. Falls $\gamma = 0$ gilt, spricht man von einer homogenen DGL zweiter Ordnung. Eine reelle Funktion $y(x)$ heißt Lösung der DGL, falls sie die Gleichung erfüllt. $y(x)$ ist Lösung des Anfangswertproblems (AWP), falls y zusätzlich vorgeschriebene Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = v_0$ erfüllt.

Wir betrachten zunächst die homogene DGL

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0$$

Wir wählen den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ und erhalten die Gleichung

$$(e^{\lambda x})'' + \alpha(e^{\lambda x})' + \beta e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha \lambda e^{\lambda x} + \beta e^{\lambda x} = (\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta) e^{\lambda x} = 0$$

Die Funktion $e^{\lambda x}$ ist also genau dann Lösung der DGL, wenn die ‘charakteristische Gleichung’

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0$$

erfüllt ist. Die Lösungen λ können z.B. mit der pq Formel bestimmt werden. Sei $D = (\frac{\alpha}{2})^2 - \beta$ die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung. Es treten drei Fälle auf:

1. Fall: $D > 0$. Dann existieren zwei reelle Lösungen λ_1 und λ_2 . Die Lösungen der DGL sind:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Fall: $D < 0$. Dann existieren zwei komplexe Lösungen λ und $\bar{\lambda}$. Sei $\lambda = a + bj$. Es gilt:

$$e^{\lambda x} = e^{ax} \cos(bx) + j e^{ax} \sin(bx)$$

und die reellen Lösungen der DGL sind

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \sin(bx)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Fall: $D = 0$. Dann existiert nur eine (doppelte) Lösung $\lambda = -\frac{\alpha}{2}$ und die Lösungen der DGL sind:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{\alpha}{2}x}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Bei DGL zweiter Ordnung ist ein AWP durch die zusätzliche Angabe $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = v_0$ bestimmt. Unsere homogene DGL zweiter Ordnung kann dann eindeutig gelöst werden: die Anfangsbedingungen legen die Parameter C_1 und C_2 fest. Zusammenfassend gilt:

Satz 3.4.2 Die homogene lineare DGL zweiter Ordnung $y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt allgemeine Lösungen der Form

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ und reellen Funktionen $y_1(x), y_2(x)$, die von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$ abhängen (s.o., 3 Fälle). Es gibt eine eindeutige Lösung des AWP

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

d.h. die Anfangsbedingungen liefern durch Einsetzen die Parameter C_1 und C_2 .

Beispiele:

- (a) DGL $y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 0$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -4$. Die Lösungen dieser DGL sind also:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) DGL $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ (Harmonischer Oszillator). Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Die Diskriminante ist < 0 (keine reelle Lösung). Eine komplexe Lösung ist $\lambda = j\omega$. Die Lösungen der DGL sind also (s.o., 2. Fall):

$$y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$$

Schreibt man die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = v_0$ vor, so folgt:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 \\ v_0 &= -C_1 \omega \sin(0) + C_2 \omega \cos(0) = C_2 \omega \end{aligned}$$

Also gilt: $C_1 = y_0$ und $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$ und die eindeutige Lösung des AWP ist:

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega x) \quad \square$$

Satz 3.4.3 Die allgemeinen Lösungen der inhomogenen linearen DGL zweiter Ordnung $y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = \gamma(x)$ ergeben sich als Summe der homogenen Lösungen (s.o.) und einer speziellen Lösung. Man erhält eine spezielle Lösung durch einen Ansatz, der von $\gamma(x)$ abhängt. Die unbekanntenen Koeffizienten werden durch Einsetzen in die DGL bestimmt.

| Störfunktion $\gamma(x)$ | Ansatz | |
|--|---|--|
| $b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ | $A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m$ | falls $\beta \neq 0$ |
| | $x(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)$ | falls $\beta = 0, \alpha \neq 0$ |
| | $x^2(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)$ | falls $\alpha = \beta = 0$ |
| $(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \cdot e^{ux}$ | $(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{ux}$ | falls $u \neq \lambda_1, \lambda_2$ |
| | $x(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{ux}$ | falls $u = \lambda_1$ oder $u = \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$ |
| | $x^2(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{ux}$ | falls $u = \lambda_1 = \lambda_2$ |
| $a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$ | $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ | falls $j\omega \neq \lambda_1, \lambda_2$ |
| | $Ax \cos(\omega x) + Bx \sin(\omega x)$ | falls $j\omega = \lambda_1$ oder $j\omega = \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$ |
| | $Ax^2 \cos(\omega x) + Bx^2 \sin(\omega x)$ | falls $j\omega = \lambda_1 = \lambda_2$ |

Beispiele:

(a) DGL $y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = xe^{-4x}$.

1. Schritt: Lösung des homogenen Systems.

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}$$

2. Schritt: Spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch einen Ansatz.

$$y(x) = x(A_0 + A_1x)e^{-4x} = A_0xe^{-4x} + A_1x^2e^{-4x}$$

Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} y'(x) &= A_0e^{-4x} - 4A_0xe^{-4x} + 2A_1xe^{-4x} - 4A_1x^2e^{-4x} \\ &= A_0e^{-4x} + (-4A_0 + 2A_1)xe^{-4x} - 4A_1x^2e^{-4x} \\ y''(x) &= -4A_0e^{-4x} + (-4A_0 + 2A_1)e^{-4x} + (-4)(-4A_0 + 2A_1)xe^{-4x} \\ &\quad - 8A_1xe^{-4x} + 16A_1x^2e^{-4x} \\ &= (-8A_0 + 2A_1)e^{-4x} + (16A_0 - 16A_1)xe^{-4x} + 16A_1x^2e^{-4x} \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$\begin{aligned} (-8A_0 + 2A_1 + 2A_0)e^{-4x} + (16A_0 - 16A_1 - 8A_0 + 4A_1 - 8A_0)xe^{-4x} \\ + (16A_1 - 8A_1 - 8A_1)x^2e^{-4x} = xe^{-4x} \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $-6A_0 + 2A_1 = 0$ und $-12A_1 = 1$, also $A_1 = -\frac{1}{12}$ und $A_0 = -\frac{1}{36}$. Eine spezielle Lösung ist also:

$$y(x) = x\left(-\frac{1}{36} - \frac{1}{12}x\right)e^{-4x}$$

3. Schritt: Die allgemeinen Lösungen der DGL sind Summe der homogenen und der speziellen inhomogenen Lösung:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + x\left(-\frac{1}{36} - \frac{1}{12}x\right)e^{-4x}$$

- (b) Betrachten wir nun die DGL $y'' + 2y' - 8y = 4\sin(2x)$, so wählt man den folgenden Ansatz (2. Schritt):

$$y(x) = A_0 \cos(2x) + B_0 \sin(2x)$$

Die Ableitungen sind $y'(x) = -2A_0 \sin(2x) + 2B_0 \cos(2x)$ und $y''(x) = -4A_0 \cos(2x) - 4B_0 \sin(2x)$ und Einsetzen in die DGL ergibt:

$$(-4A_0 + 4B_0 - 8A_0) \cos(2x) + (-4B_0 - 4A_0 - 8B_0) \sin(2x) = 4 \sin(2x)$$

Koeffizientenvergleich für die Cosinus- und Sinusterme ergibt:

$$-12A_0 + 4B_0 = 0 \quad \text{und} \quad -12B_0 - 4A_0 = 4$$

Also ist $B_0 = 3A_0$ und $-36A_0 - 4A_0 = 4$, d.h. $A_0 = -\frac{1}{10}$ und $B_0 = -\frac{3}{10}$. Die spezielle Lösung ist daher

$$-\frac{1}{10} \cos(2x) - \frac{3}{10} \sin(2x)$$

Die allgemeine Lösung (3. Schritt) ist dann (siehe Abbildung 26):

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{10} \cos(2x) - \frac{3}{10} \sin(2x)$$

- (c) Erweitert man dies zum AWP $y'' + 2y' - 8y = 4\sin(2x)$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = -1$, so können die Parameter C_1 und C_2 in obiger Lösung der DGL noch berechnet werden (4. Schritt). Wir benötigen dazu noch $y'(x)$:

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x} + \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{3}{5} \cos(2x)$$

Man setzt die Anfangsbedingungen in $y(x)$ und $y'(x)$ ein und erhält die Gleichungen:

$$C_1 + C_2 - \frac{1}{10} = 1 \quad \text{und} \quad 2C_1 - 4C_2 - \frac{3}{5} = -1$$

Dieses Gleichungssystem löst man mit dem Gauß-Verfahren und erhält $C_1 = \frac{2}{3}$ und $C_2 = \frac{13}{30}$. Die Lösung des AWP ist also:

$$y(x) = \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{13}{30}e^{-4x} - \frac{1}{10} \cos(2x) - \frac{3}{10} \sin(2x)$$

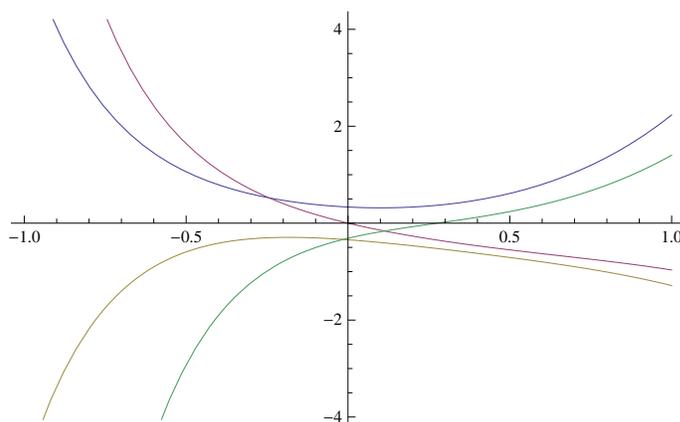


Abbildung 26: Beispiele für Lösungen der DGL $y'' + 2y' - 8y = 4 \sin(2x)$ (Variation von C_1 und C_2).



Die Vorgehensweise beim Lösen von linearen DGL erster oder zweiten Ordnung mit konstanten Koeffizienten und eines zugehörigen AWP ist also:

1. Schritt: Das homogene System lösen.
2. Schritt: Eine spezielle Lösung bestimmen (einen Ansatz in das inhomogene System einsetzen und die Parameter des Ansatzes bestimmen).
3. Schritt: Die allgemeine Lösung der DGL aufschreiben (homogen+speziell).
4. Schritt: Das AWP durch Einsetzen der Anfangsbedingungen lösen.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

4.1 Vektorräume und Untervektorräume

In der Mathematik 1 wurden bereits die Vektorräume K^n behandelt. Dabei ist K ein Körper (z.B. \mathbb{R} oder $GF(2)$) und K^n umfasst die n -dimensionalen Spalten- (oder Zeilen-) vektoren. Vektoren können addiert werden und es gibt eine skalare Multiplikation von Zahlen aus K mit Vektoren. Auch der allgemeine Begriff des *Vektorraums* ist aus dem letzten Semester bekannt:

Definition 4.1.1 Ein Vektorraum V über einem Körper K ist eine abelsche Gruppe bzgl. der Vektoraddition $+$

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

mit einer skalaren Multiplikation \cdot

$$\bullet : K \times V \rightarrow V$$

Dabei sollen die folgenden Rechenregeln gelten:

- (a) $(u + v) + w = u + (v + w)$ für alle $u, v, w \in V$
- (b) Es existiert ein Element (Nullvektor) $O \in V$ mit $O + v = v + O = v$ für alle $v \in V$
- (c) Es existiert zu jedem $v \in V$ ein $-v \in V$ mit $v + (-v) = (-v) + v = O$
- (d) $v + w = w + v$ für alle $v, w \in V$
- (e) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ für alle $\lambda \in K, v, w \in V$
- (f) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$
- (g) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$
- (h) $1 \cdot v = v$ für alle $v \in V$

Bemerkung 4.1.2 Die ersten vier Regeln bedeuten, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Die übrigen Regeln sind Distributivgesetze und Rechenregeln für die skalare Multiplikation. Die letzte Regel dient der Normierung.

Beispiele:

- (a) Für einen Körper K und ein positives $n \in \mathbb{N}$ ist K^n ein Vektorraum (der Standardvektorraum), z.B. \mathbb{R}^2 (Ebene) oder $GF(2)^8$ (Bytes).

- (b) Die Menge aller komplexen Polynome $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ bilden einen \mathbb{C} -Vektorraum (bzgl. Polynomaddition).
- (c) Die Menge aller stetigen reellen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum.

Wir werden uns meistens auf die Standardvektorräume K^n (Dimension n) und ihre Untervektorräume (s.u.) wie im Beispiel a) beschränken. b) und c) sind Beispiele von Vektorräume von Funktionen. c) ist ein Beispiel für einen *unendlich-dimensionalen* Vektorraum. Der Begriff der Dimension wird später noch erläutert.

Definition 4.1.3 Eine nichtleere Teilmenge U eines K -Vektorraums V heißt Untervektorraum (UVR), falls gilt:

$$(a) \quad u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$$

$$(b) \quad \lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U$$

Untervektorräume sind also bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen und sind ebenfalls Vektorräume. Der Nullvektor ist stets Element eines UVR U (verwende hierzu Eigenschaft (b) mit $\lambda = 0$ und beliebigem $u \in U$).

Beispiele:

- (a) K^n und $\{0\}$ sind UVR des K^n
- (b) $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein UVR des \mathbb{R}^2 , ebenso wie alle anderen Geraden durch den Ursprung.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (Einheitskreis) ist kein UVR im \mathbb{R}^2 , denn z.B. Vielfache eines Vektors liegen im Allgemeinen nicht mehr auf dem Einheitskreis.
- (d) Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3 durch den Ursprung O sind UVR des \mathbb{R}^3 . Falls der Ursprung nicht enthalten ist, so ist es kein UVR !

Die Menge der linearen Kombinationen von gegebenen Vektoren bildet einen UVR:

Satz 4.1.4 Sind v_1, v_2, \dots, v_n Vektoren eines K -Vektorraums V , so ergibt

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

einen UVR von V , den man auch Erzeugendensystem, lineare Hülle oder (engl.) Span von v_1, v_2, \dots, v_n nennt. Bezeichnung:

$$U = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Man sagt: die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n erzeugen U bzw. spannen U auf.

Beispiel: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist ein UVR im \mathbb{R}^3 . U ist eine Ebene durch den

Ursprung mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung 4.1.5 Man kann zeigen, dass Vektorräume und Untervektorräume stets die lineare Hülle einer Menge von Vektoren sind. Die minimal notwendige Anzahl von Vektoren werden wir später als *Dimension* bezeichnen.

4.2 Lineare Abbildungen

Zur Transformation von Vektoren kennen wir bereits die Multiplikation mit einer Matrix: $f(x) = A \cdot x$. Durch Multiplikation mit einer $m \times n$ Matrix A wird $x \in K^n$ auf einen Vektor $y = f(x) = A \cdot x \in K^m$ abgebildet.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & n & \\
 m & \boxed{A} & \\
 & & \\
 & \cdot & \\
 & \begin{array}{c} l \\ \boxed{x} \\ n \end{array} & \\
 & & \\
 & = & \\
 & \begin{array}{c} l \\ \boxed{y} \\ m \end{array} &
 \end{array}
 \end{array}$$

Abbildung 27: Multiplikation $A \cdot x = y$

Besitzt A die Spaltenvektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in K^m$ und hat x die Komponenten $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$, so ist

$$A \cdot x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in K^m$$

$A \cdot x$ ist also eine Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A , wobei die Gewichte der einzelnen Vektoren durch den Vektor x gegeben ist.

Die Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ ist verträglich mit der Addition und skalaren Vielfachen: $A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y$ und $A \cdot (\lambda x) = \lambda(A \cdot x)$. Diese Eigenschaft kennzeichnet einen wichtigen Typ von Abbildungen, die linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen:

Definition 4.2.1 Seien V und W Vektorräume über K , z.B. $V = K^n$ und $W = K^m$. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$
- (b) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$

Zu jeder linearen Abbildung gibt es spezielle UVR im Definitions- und Zielbereich:

Satz 4.2.2 Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von K -Vektorräumen. Dann gilt:

- (a) $\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = O\}$ ist ein UVR von V (der Kern der Abbildung).
- (b) $\operatorname{im}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\}$ (das Bild der Abbildung) ist ein UVR von W .

Beweis:

- (a) Wenn $f(v_1) = O$ und $f(v_2) = O$ gilt, dann folgt auch $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = O + O = O$. Für $\lambda \in K$ und $f(v) = O$ gilt dann $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda O = O$.
- (b) Wenn $w_1, w_2 \in W_f$ gilt, so existieren $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Dann folgt aber $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$, so dass $w_1 + w_2 \in W_f$. Außerdem gilt für $\lambda \in K$ und $f(v) = w$, dass $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v)$, so dass $\lambda w \in W_f$.

Kern und Bild stehen in enger Beziehung zur Injektivität und Surjektivität von linearen Abbildungen.

Satz 4.2.3 Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von K -Vektorräumen. Dann gilt:

- (a) $\ker(f) = \{0\} \iff f$ ist injektiv.
- (b) $\operatorname{im}(f) = W \iff f$ ist surjektiv.

Beweis: a) Übungsaufgabe. b) folgt aus der Definition des Bildes und dem Begriff der Surjektivität.

Wie beschreibt man lineare Abbildungen? Mit Hilfe von Matrizen:

Satz 4.2.4 Sei A eine $m \times n$ Matrix über K . Dann wird durch:

$$l_A : K^n \rightarrow K^m \quad x \mapsto A \cdot x$$

eine lineare Abbildung beschrieben.

Beweis: Die Linearitätseigenschaften folgen aus den Rechenregeln für Matrizen.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Diese reelle Matrix definiert die lineare Abbildung

$l_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$l_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

oder in Zeilenschreibweise:

$$l_A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 2x_2 + 3x_3)$$

Nach dem Satz 4.2.4 sind also die Abbildungen, die Matrizen zugeordnet sind, lineare Abbildungen. Nun stellt sich die Frage: werden alle linearen Abbildungen auch durch Matrizen beschrieben? Die Antwort ist positiv, es besteht eine 1:1 Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen.

Satz 4.2.5 Sei $f : K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dann wird f durch eine $m \times n$ Matrix A über K beschrieben, d.h. es gilt $f(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$. Man erhält die zugehörige Matrix indem man die Bilder $f(e_i) \in K^m$ der Einheitsvektoren in die Spalten der Matrix schreibt.



Lineare Abbildungen $l_A(x) = Ax$ und die zugehörigen Matrizen A werden häufig identifiziert. Jede Matrix hat eine zugeordnete lineare Abbildung und umgekehrt.

Beispiel einer *Drehung*: Bei einer Drehung um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn und um den Ursprung) erhalten wir die folgende Abbildung der Einheitsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix zu einer Drehung um den Winkel α ist also

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Matrix kann zur Drehung von Vektoren verwendet werden: Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ geht durch Drehung in den Vektor $A \cdot v$ über.



Lineare Abbildungen erkennt man daran, dass jede Komponente des Ausgangsvektors eine lineare Kombination der Eingangsvariablen ist. Dies bedeutet auch, dass der Ergebnisvektor durch Multiplikation einer Abbildungsmatrix mit dem Eingangsvektor entsteht.

Beispiele:

- (a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 8x_4$ beschreibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Die zugehörigen Abbildungsmatrix hat nur eine Zeile:

$$A = (2 \quad -1 \quad 7 \quad 8)$$

- (b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, jx_2, (3 - 2j)x_1 - x_2 + 7x_3)$ ist linear über \mathbb{C} . Die Abbildungsmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & j & 0 \\ 3 - 2j & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

- (c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2^2, \sin(x_3))$ ist nicht linear über \mathbb{R} (quadratisch in der zweiten Komponenten, Schwingung in der dritten Komponenten).
- (d) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1, 2 + x_1 - 3x_2)$ ist nicht linear über \mathbb{R} (wegen der Konstanten), aber eine *affine* Abbildung. f ist Summe des linearen Anteils $(x_1, x_1 - 3x_2)$ und einer konstanten Verschiebung um $(1, 2)$. Solche Abbildungen können jedoch mit *homogenen* Koordinaten linear beschrieben werden (siehe Abschnitt 4.8).
- (e) $f(b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_2, b_1, b_3, b_1 + b_4)$ ist linear über $GF(2)$. Eine allgemeine boolesche Funktionen $GF(2)^n \rightarrow GF(2)$ ist linear, falls sie durch eine reine Summe (+ bzw. XOR) der Variablen beschrieben wird, d.h. keine Produkte und keine Konstante.

Mit Hilfe der Matrix lassen sich auch Kern und Bild explizit bestimmen:

Satz 4.2.6 Sei $f : K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix A . Dann gilt: $\ker(f)$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. $\text{im}(f)$ ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren von A .

Beispiele:

- (a) Sei $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 2x_2 + 3x_3)$. Es gilt: $f(1, 0, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2)$ und $f(0, 0, 1) = (-1, 3)$. Schreibt man diese Bildvektoren in die Spalten, so erhält man:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } f(x) = Ax$$

Das Bild von f ist der UVR aus den Spaltenvektoren und stimmt hier mit dem Zielbereich \mathbb{R}^2 überein (d.h. f ist surjektiv). Der Kern von f ist hingegen die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$ und ein echter UVR im \mathbb{R}^3 . Die Matrix A ist bereits in Trapezform: x_3 ist freie Variable und die zweite Zeile ergibt: $2x_2 = -3x_3$, d.h. $x_2 = -\frac{3}{2}x_3$. Einsetzen in die erste Zeile liefert: $2x_1 - \frac{3}{2}x_3 - x_3 = 0$, also $x_1 = \frac{5}{4}x_3$. Die Lösungsmenge besteht aus allen $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$x = x_3 \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Also folgt:

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (b) Paritätsbit: Jeweils 7 Nachrichten-Bits werde zur Fehlererkennung ein Paritätsbit angehängt, das 1 sei bei einer ungeraden Anzahl von Einsen, und 0 bei einer geraden Anzahl. Dies wird durch folgende Abbildung beschrieben:

$$f : GF(2)^7 \longrightarrow GF(2)^8$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) \mapsto (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7)$$

Die zugehörige 8×7 Abbildungsmatrix über $GF(2)$ ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Bild von f ist die lineare Hülle der 7 Spaltenvektoren dieser Matrix und ein UVR im $GF(2)^8$. Der Kern von f besteht nur aus dem Nullvektor (f ist injektiv).

- (c) Kodierung: 4 Datenbits werden beim (7, 4)-Hamming-Code zur Fehlererkennung und -korrektur durch 7-Bit Wörter kodiert. Die Kodierung ist eine lineare Abbildung $g : GF(2)^4 \rightarrow GF(2)^7$, die durch eine 7×4 -Matrix G beschrieben wird: $g(x) = G \cdot x$ mit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Bild im (g) ist die lineare Hülle der 4 Spaltenvektoren von G . Da die Koeffizienten jeweils nur 0 oder 1 sein können, besteht das Bild von g aus $2^4 = 16$ sogenannten *Codewörtern*. Der Kern von g ist Null, d.h. g ist injektiv.

- (d) Der obige (7, 4)-Hamming-Code kann auch durch eine Kontrollmatrix beschrieben werden. Hierzu betrachtet man die lineare Abbildung $h : GF(2)^7 \rightarrow GF(2)^3$ mit $h(x) = H \cdot x$ und

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Kern von h besteht gerade aus den 16 Codewörtern. Ein Vektor $x \in GF(2)^7$ kann mit der Gleichung $H \cdot x = O$ überprüft werden, die genau von den Codewörtern erfüllt wird.

Die Komposition (Hintereinanderausführung, Verkettung) von linearen Abbildungen entspricht der Multiplikation von Matrizen:

Satz 4.2.7 Seien $f : K^n \rightarrow K^m$ und $g : K^k \rightarrow K^n$ zwei lineare Abbildungen mit zugehöriger $m \times n$ Matrix A und $n \times k$ Matrix B . Dann ist die Komposition $f \circ g : K^k \rightarrow K^m$ ebenfalls linear mit der $m \times k$ Abbildungsmatrix AB .

Beispiel: Betrachtet man die Hintereinanderausführung von $g : GF(2)^4 \rightarrow GF(2)^7$ und $h : GF(2)^7 \rightarrow GF(2)^3$ (s.o. Beispiele zum Hamming-Code), so wird $h \circ g$ durch das Matrixprodukt $H \cdot G$ beschrieben. Man verifiziert, dass $H \cdot G = O$ (Nullmatrix) gilt. In der Tat ist auch $h \circ g = 0$, denn die Bilder von g sind die Codewörter, die wiederum im Kern von h liegen.

4.3 Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Rang

Für die weitere Klassifikation und Untersuchung von linearen Abbildungen und Matrizen ist der Begriff der linearen Unabhängigkeit wichtig.

Definition 4.3.1 Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ heißen *linear unabhängig*, falls die Gleichung

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0$$

nur durch $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ gelöst wird (*triviale Lösung*). Ist $V = K^n$ und schreibt man die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n in Spalten einer $m \times n$ Matrix A , so bedeutet dies: das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ wird nur durch den Nullvektor gelöst. Anderenfalls (d.h. falls ein nichttrivialer Lösungsvektor existiert) sind die Vektoren *linear abhängig*.

Lineare Unabhängigkeit bedeutet, dass keiner der Vektoren durch eine Linearkombination der anderen dargestellt werden kann; es existiert also keine Abhängigkeit zwischen den Vektoren. Umgekehrt bedeutet lineare Abhängigkeit, dass mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Beispiele:

- (a) Die beiden Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear unabhängig:

Man löst das zugehörige LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad I + II$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Daraus folgt $\frac{7}{2}x_2 = 0$, also $x_2 = 0$. Aus Gleichung I folgt dann $-2x_1 = 0$, also auch $x_1 = 0$. Das LGS hat also nur die triviale Lösung $x = 0$.

- (b) Untersucht man nun die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ im

\mathbb{R}^3 auf lineare Unabhängigkeit, so ergibt sich ein LGS mit der folgenden Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 8 & 3 & | & 0 \\ 5 & 19 & 8 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-2) \cdot I + II \\ (-5) \cdot I + III \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} (-2) \cdot II + III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile fällt weg, es gibt eine freie Variable (x_3). Wählt man z.B. $x_3 = 1$, so folgt mit II : $x_2 = \frac{1}{2}$ und mit I : $x_1 = -\frac{7}{2}$. Es gibt also eine nichttriviale Lösung, die drei Vektoren sind also linear abhängig. Es gilt

$$v_3 = \frac{7}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$$

Der Vektor v_3 ist also abhängig von v_1 und v_2 und liegt in der von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene.

In K^2 sind maximal 2 Vektoren linear unabhängig, im K^3 höchstens 3 Vektoren usw.

Satz 4.3.2 Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in K^m$ sind immer linear abhängig, falls $n > m$.

Definition 4.3.3 Die Dimension $\dim(V)$ eines Vektorraums (oder UVR) V ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in diesem Raum.

Beispiele:

- $\dim(K^n) = n$, denn die Einheitsvektoren e_1, e_2, \dots, e_n sind linear unabhängig. Jeder weiterer Vektor ist Linearkombination dieser Vektoren, also abhängig, so dass das System der Einheitsvektoren nicht durch unabhängige Vektoren erweitert werden kann.
- Falls $U = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, so ist die Dimension von U die maximale Anzahl der Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n , die linear unabhängig sind.
- Die Dimension einer Gerade (durch den Ursprung) im \mathbb{R}^n (z.B. $n = 2$) ist gleich 1. Jeder Vektor auf der Geraden (ungleich O) ist als einelementige Menge linear unabhängig. Fügt man weitere Vektoren auf der Geraden hinzu, so wird das System linear abhängig.

- (d) Die Dimension einer Ebene (durch den Ursprung) im \mathbb{R}^3 ist gleich 2. Jeweils zwei nicht-kollineare Vektoren sind linear unabhängig. Drei oder mehr Vektoren einer Ebene sind immer linear abhängig.

Definition 4.3.4 Sei V ein Vektorraum (oder UVR) der Dimension n . Eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren, d.h. eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum der Dimension n , wird **Basis** genannt.

Bemerkung 4.3.5 Falls $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist, so gilt

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle .$$

Die lineare Hülle der Basisvektoren ergibt (wegen der Maximalität) den gesamten Vektorraum. Eine Basis ist daher auch ein sogenanntes *Erzeugendensystem* von V . Man kann eine Basis daher auch so definieren: *eine Basis ist eine Menge von Vektoren, die linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem des Vektorraums bilden.*

Definition 4.3.6 Sei $V = \mathbb{R}^n$. Eine **Orthonormalbasis (ONB)** $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V mit der zusätzlichen Eigenschaft $v_i \cdot v_j = 0$ für $i \neq j$ sowie $v_i \cdot v_i = 1$. Die Vektoren einer ONB sind also paarweise orthogonal und ihre Norm ist 1 (d.h. sie sind normiert).

Bemerkung 4.3.7 Der Begriff der ONB lässt sich auch auf die komplexen Vektorräume \mathbb{C}^n übertragen. Allerdings muss bei der Berechnung des Skalarproduktes jeweils der zweite Faktor komplex konjugiert werden.

Beispiele:

- (a) Die Standardeinheitsvektoren $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n , aber es existieren natürlich viele weitere ONB.

- (b) Die beiden Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^2 und $\{\frac{1}{\sqrt{5}}b_1, \frac{1}{\sqrt{5}}b_2\}$ ist sogar eine ONB.

(c) Die komplexen Vektoren $c_1 = \begin{pmatrix} -j \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{C}^2 , denn es gilt $c_1 \cdot c_1 = (-j)\overline{(-j)} + 0 = 1$, $c_2 \cdot c_2 = 0 + j\bar{j} = 1$, $c_1 c_2 = 0$.

(d) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Vektorraum

$GF(2)^3$ gegeben. Dann gilt: $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear unabhängig (Nachweis z.B. durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems) und daher eine Basis des $GF(2)^3$. Die Vektoren $\{v_1, v_2, v_4\}$ sind dagegen linear abhängig (es gilt z.B. $v_4 = v_1 + v_2$) bilden daher keine Basis. ONBs können nicht existieren, da es sich um einen $GF(2)$ -Vektorraum handelt.

(e) Bei der diskreten Fouriertransformation (die wir hier nicht näher besprechen) wird die folgende orthogonale Fourier-Basis des \mathbb{C}^n verwendet:

$$v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \text{ mit } v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{n}k} \\ e^{j\frac{2\pi}{n}2k} \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{n}(n-1)k} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Alle Komponenten von v_k sind n -te Einheitswurzeln (d.h. komplexe n -te Wurzeln von 1). Man zeigt, dass $v_k \cdot v_l = 0$ für $k \neq l$ und $v_k \cdot v_k = n$ gilt. Die Vektoren sind also orthogonal, aber nicht normiert. Das System $\frac{1}{\sqrt{n}}v_0, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}v_{n-1}$ ist dann eine ONB des \mathbb{C}^n .

(f) Ein einfacher Spezialfall von d) ergibt sich für $n = 2$. Dann gilt:

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}v_0$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}v_1$ bilden eine ONB von \mathbb{R}^2 und \mathbb{C}^2 .

Bemerkung 4.3.8 Eine ONB ist gegenüber der Standardbasis nur gedreht oder gespiegelt, die Vektoren sind ebenso wie die Standardbasis orthogonal und normiert. ONB gehören daher meistens zu den bevorzugten Basen.

In einer engen Beziehung zur Dimension steht der *Rang* einer Matrix. Es existieren zunächst drei verschiedene Möglichkeiten den Rang zu definieren:

Definition 4.3.9 Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann ist der Zeilenrang die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren, der Spaltenrang ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren, und der Rang der linearen Abbildung l_A ist die Dimension des Bildraums $\text{im}(l_A)$, d.h. $\text{rg}(A) = \dim(\text{im}(l_A))$.

Satz 4.3.10 Es gilt $\text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang} = \text{Rang der zugehörigen lineare Abbildung}$. Man spricht daher insgesamt vom Rang $\text{rg}(A)$ einer Matrix A bzw. $\text{rg}(f)$ einer linearen Abbildung f .

Beweis: Wir zeigen nur, dass der Spaltenrang einer Matrix A gleich dem Rang von l_A ist. Der Bildraum von l_A sind gerade alle Vektoren y der Form Ax , wobei $x \in K^n$ beliebig ist. Es genügt aber, für x zunächst nur die Elemente einer Basis des K^n einzusetzen (z.B. die Standardbasis e_1, e_2, \dots, e_n), da sich alle anderen Vektoren als Linearkombination ergeben. Dann gilt für den Bildraum:

$$\text{im}(l_A) = \langle Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n \rangle$$

Die Vektoren Ae_i sind genau die Spaltenvektoren von A , so dass die Dimension von $\text{im}(l_A)$ (d.h. der Rang von l_A) gerade die maximale Anzahl der unabhängigen Spaltenvektoren von A ist. \square

Bemerkung 4.3.11 Für Berechnungen des Rangs ist von besonderer Bedeutung, dass Gauß'sche Zeilen- (oder Spalten-) Umformungen den Rang nicht ändern. Soll der Rang also bestimmt werden, so nimmt man solange Zeilenumformungen vor, bis man die maximale Zahl von linear unabhängigen Zeilen ablesen kann. Konkret geht man so vor: man überführt eine gegebene Matrix A durch Zeilenumformungen und ggf. Zeilen- und Spaltenvertauschungen in die folgende Trapezform (Zeilenstufenform):

$$\begin{pmatrix} b_1 & * & * & * \\ 0 & b_2 & * & * \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & b_k & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei alle Diagonaleinträge $b_1, b_2, \dots, b_k \neq 0$ sind. Dann gilt: $\text{rg}(A) = k$.

Beispiel: Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 19 & 8 \end{pmatrix}$. Diese Matrix wird zur Bestimmung des Rangs mit Gaußschen Zeilenumformungen in Trapezform (Zeilenstufenform) gebracht (vgl. Beispiel b) zu Definition 4.3.1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 19 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2) \cdot I + II \\ (-5) \cdot I + III \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (-2) \cdot II + III \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $\text{rg}(A) = 2$. Daher ist auch der Spaltenrang gleich 2, es gibt also nur 2 (und nicht 3) linear unabhängige Spaltenvektoren, wie bereits in Beispiel b) zu 4.3.1 festgestellt wurde. Entsprechend ist auch der Zeilenrang gleich 2, z.B. sind die ersten beiden Zeilen linear unabhängig und die dritte Zeile ist eine Linearkombination der ersten beiden ($I + 2 \cdot II$). A ist ein Beispiel einer *singulären* Matrix.

Definition 4.3.12 Eine quadratische $n \times n$ Matrix heißt *regulär*, falls der Rang maximal ist, d.h. falls $\text{rg}(A) = n$ gilt. Anderenfalls heißt sie *singulär*.

Reguläre $n \times n$ Matrizen lassen sich also durch Zeilenumformungen (und ggf. Spaltenvertauschungen) in Dreiecksform bringen, wobei alle Diagonaleinträge $b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$ sind:

$$\begin{pmatrix} b_1 & * & * & * \\ 0 & b_2 & * & * \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

Aus dem letzten Semester wissen wir bereits, dass solche Matrizen in die Einheitsmatrix überführt werden können und daher invertierbar sind. Die regulären Matrizen sind genau die invertierbaren Matrizen:

Satz 4.3.13 Sei $f : K^n \rightarrow K^n$ eine lineare Abbildung mit der quadratischen Abbildungsmatrix A . Die folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) f ist bijektiv.
- (b) A ist invertierbar, d.h. A^{-1} existiert.
- (c) A ist regulär, d.h. $\text{rg}(A) = n$.
- (d) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (e) Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (f) $\ker(f) = \{O\}$.
- (g) $\text{im}(f) = K^n$.

Mit Hilfe der Determinante existiert sogar noch eine weitere äquivalente Aussage.

4.4 Determinante

Die Regularität einer Matrix kann durch Gaußsche Zeilenumformungen festgestellt werden. Alternativ bestimmt man die Determinante (eine eindimensionale Kenngröße), die angibt ob eine Matrix regulär ist.

Definition 4.4.1 Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix. Dann ist die Determinante $\det(A) \in K$ so definiert:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Beispiel: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11$

Definition 4.4.2 Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine 3×3 Matrix. Dann ist die Determinante $\det(A) \in K$ wie folgt definiert:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.4.3 Es existiert eine weitere Möglichkeit, 3×3 Determinanten auszurechnen (Sarrus-Regel).

Nach einem ähnlichen Verfahren kann die Determinante von größeren Matrizen bestimmt werden:

Definition 4.4.4 Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ Matrix. Dann definiert man:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) \pm \cdots \pm a_{1n} \det(A_{1n})$$

wobei A_{1i} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, die durch Streichen der ersten Zeile und i -ten Spalte entsteht.

Bemerkung 4.4.5 Dies ist die Laplacesche Entwicklung nach der ersten Zeile. Man kann auf ähnliche Weise auch nach den anderen Zeilen (oder Spalten) entwickeln. Das Vorzeichen der Unterdeterminanten wechselt wie in einem Schachbrett zwischen $+$ und $-$.

Beispiel: Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & -12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & -12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 112 - 0 = 224$$

Satz 4.4.6 Sei A eine quadratische Matrix. Dann ist A genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Beispiele:

(a) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (s.o.) ist singulär.

- (b) Die Drehmatrizen $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ sind stets regulär, denn ihre Determinante ist $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Die zugehörige Abbildung ist also bijektiv, was ja auch deshalb gilt, weil eine Drehung durch die entgegengesetzte Drehung invertiert wird.



Regularität lässt sich auch durch eine Rangüberlegung und elementaren Umformungen der Matrix feststellen. Die Determinante ist hierzu nicht immer die effizienteste Methode.

Bemerkung 4.4.7 Vorsicht bei sehr kleinen Determinanten (z.B. $\det(A) = 10^{-12}$). Eine solche Matrix kann regulär sein, aber der Wert kann durch numerische Berechnungen auch einen Fehler aufweisen, so dass die Determinante eigentlich Null und die Matrix entsprechend singulär ist.

Satz 4.4.8 Die Determinante hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man Vielfache einer Zeile oder Spalte zu einer anderen addiert.
- (b) Multipliziert man eine Zeile mit c , so multipliziert sich der Wert der Determinante ebenfalls mit c .
- (c) Die Determinante ist eine lineare Abbildung, wenn man eine Zeile oder Spalte variiert und die übrigen konstant lässt.
- (d) Die Determinante ist gleich 0, wenn in zwei Zeilen oder Spalten der gleiche Vektor steht. Ihr Vorzeichen ändert sich, wenn man zwei Zeilen oder Spalten vertauscht.
- (e) $\det(cA) = c^n \det(A)$ für eine $n \times n$ Matrix A
- (f) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- (g) $\det(A^T) = \det(A)$
- (h) Die Determinante einer Matrix in Dreiecksgestalt ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

$$\text{Beispiel (zu h): } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 1 = -6.$$

Bemerkung 4.4.9 Die Determinante ist linear in jeder Zeile oder Spalte und Vertauschungen von zwei Zeilen oder Spalten verändern das Vorzeichen. Man sagt, die Determinante ist eine *alternierende Multilinearform*.

Die Determinante hat die folgende geometrische Bedeutung:

Satz 4.4.10 (a) Für eine reelle 2×2 Matrix A ist $|\det(A)|$ die Fläche des Parallelogramms, das die beiden Spaltenvektoren im \mathbb{R}^2 aufspannen.

(b) Für eine reelle 3×3 Matrix A ist $|\det(A)|$ das Volumen des Parallelepipeds (Spats), das von den drei Spaltenvektoren im \mathbb{R}^3 aufgespannt wird.

Die inverse Matrix kann mit Hilfe der Determinante bestimmt werden. Wir nennen diese Formel nur für 2×2 Matrizen.

Satz 4.4.11 Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine reguläre Matrix (d.h. $\det(A) \neq 0$). Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.4.12 Es existiert eine geschlossene Formel zur Invertierung von $n \times n$ Matrizen sowie zur Lösung von regulären LGS mit Hilfe der Determinante (Cramersche Regel). Da dies aber in der Regel mehr Aufwand als Gaußsche Zeilenumformungen erfordert, wird dies hier nicht weiter besprochen.

4.5 Orthogonale Abbildungen und Matrizen

Definition 4.5.1 Eine reguläre Matrix A über \mathbb{R} (und die zugehörige lineare Abbildung) heißt *orthogonal*, falls

$$A^{-1} = A^T$$

Für orthogonale Matrizen gilt also $AA^T = E$ und $A^T A = E$. Da die Zeilen von A^T gerade die Spalten von A sind (und umgekehrt), bedeuten diese Gleichungen nach Definition der Matrizenmultiplikation: das Skalarprodukt der Spaltenvektoren von A ist 0 (bei verschiedenen Spalten) bzw. 1 (bei gleichen Spalten). Die Spaltenvektoren sind also normiert (Länge 1) und senkrecht zueinander, bilden also eine Orthonormalbasis. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Zeilenvektoren.

Satz 4.5.2 *Eine reelle Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren (oder ihre Zeilenvektoren) eine ONB bilden.*

Orthogonale Abbildungen sind verzerrungsfrei:

Satz 4.5.3 *Orthogonale Abbildungen sind längen- und winkelerhaltend.*

Beweis: Länge (Norm) und Winkel sind mit Hilfe des Skalarproduktes auf dem \mathbb{R}^n definiert (vgl. Mathematik 1). Es ist also zu zeigen, dass das Skalarprodukt bei orthogonalen Abbildungen erhalten bleibt. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und A eine orthogonale Matrix. Dann gilt:

$$(Av) \cdot (Aw) = (A \cdot v)^T \cdot (A \cdot w) = v^T \cdot A^T \cdot A \cdot w = v^T \cdot w = v \cdot w$$

wobei die Produktzeichen links und rechts das Skalarprodukt bezeichnen, und die übrigen Punkte die Matrizenmultiplikation. \square

Beispiele für orthogonale Matrizen und Abbildungen:

(a) Drehmatrizen $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Drehung in der x, y -Ebene).

(b) Spiegelung an der x -Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Spiegelung an der x, z -Ebene: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Drehspiegelung $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

(Drehung in der x, z -Ebene und Spiegelung an der x, z -Ebene).

Bemerkung 4.5.4 Man kann zeigen, dass orthogonale Abbildungen stets Kombinationen von Drehungen und Spiegelungen sind. Bei den Beispielen oben waren die Dreh- oder Spiegelachsen auf den Koordinatenachsen, was einen Spezialfall darstellt. Mit Hilfe eines Basiswechsels (s.u.) lässt sich aber auch der Fall allgemeiner Dreh- oder Spiegelachsen gut beschreiben.



Eine Matrix A ist orthogonal, falls sie $AA^T = E$ erfüllt. Dies ist eine einfache Prüfmöglichkeit ohne die inverse Matrix zu bestimmen! Falls die Gleichung gilt, so ist $A^{-1} = A^T$.

4.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Betrachtet man eine lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^n$ mit zugehöriger $n \times n$ Matrix A , so ist diese besonders einfach für diejenigen Vektoren v , die nur auf ein Vielfaches abgebildet werden, d.h.

$$f(v) = Av = \lambda v$$

Solche Vektoren v heißen *Eigenvektoren*, und der zugehörige Faktor λ *Eigenwert*. Der eindimensionale Unterraum $\langle v \rangle$ eines Eigenvektors wird dann auf sich abgebildet und ist eine *invariante Achse* der Abbildung. In günstigen Fällen existieren n linear unabhängige Eigenvektoren (d.h. eine Basis aus Eigenvektoren), so dass die gesamte lineare Abbildung dann mit Hilfe dieser Vektoren einfach durch eine Summe von Streckungen beschrieben werden kann.

Definition 4.6.1 Sei A eine $n \times n$ Matrix über K . Ein Vektor $v \neq 0$ heißt *Eigenvektor zum Eigenwert* $\lambda \in K$, falls gilt:

$$Av = \lambda v$$

Der *Eigenraum* zum Eigenwert λ ist die Menge aller Eigenvektoren mit dem Eigenwert λ einschließlich dem Nullvektor.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist der Einheitsvektor e_1 Eigenvektor zum Eigenwert -3 , und e_2 Eigenvektor zum Eigenwert 4 .

Spezialfall $\lambda = 0$: Falls $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist, so ist der Eigenraum zum Eigenwert 0 gleich dem Kern von A . Falls 0 kein Eigenwert ist, so ist die Matrix regulär.

Bemerkung 4.6.2 Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = \lambda x$. Dies ist äquivalent zu

$$(A - \lambda E)x = O$$

so dass der Eigenraum als Lösungsmenge eines homogenen LGS berechnet werden kann.

Wie werden Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet ? Bei komplizierteren Matrizen kann man die Eigenvektoren und -werte nicht direkt ablesen. Man ermittelt zuerst die Eigenwerte und dann getrennt für jeden Eigenwert durch Lösung eines LGS (s.o.) die Eigenvektoren und den Eigenraum.

Satz 4.6.3 $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert einer quadratischen Matrix A , falls $\det(A - \lambda E) = 0$.

Beweis: $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = O \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = O$. $A - \lambda E$ ist eine quadratische Matrix und es existiert nur dann eine nicht-triviale Lösung des LGS $(A - \lambda E)v = O$, wenn die Matrix singularär ist, d.h. wenn $\det(A - \lambda E) = 0$. \square

Man nennt $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ das *charakteristische Polynom*. Zur Bestimmung der Eigenwerte λ setzt man die charakteristische Polynome $p(\lambda) = 0$ und löst nach λ auf. Dann bestimmt man für jeden Eigenwert λ getrennt den Eigenraum, indem man das LGS $(A - \lambda E)v = O$ löst.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -4 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(-\lambda) - (-8) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Eigenwerte von A , sind 2 und 4.

Nun bestimmt man die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$. Dazu löst man das LGS $(A - 2E)x = O$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \\ 4 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Setzt man x_2 als freie Variable, so erhält man $x_1 = x_2$ und der Lösungsraum (Eigenraum zum Eigenwert 2) ist

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist z.B. ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

Anschließend werden die Eigenvektoren zum Eigenwert 4 bestimmt. Dazu löst man das LGS $(A - 4E)x = O$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Setzt man x_2 als freie Variable, so erhält man $x_1 = 2x_2$ und der Lösungsraum (Eigenraum zum Eigenwert 4) ist

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist z.B. ein Eigenvektor zum Eigenwert 4.



Erst mit Hilfe des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte bestimmen und dann für jeden Eigenwert getrennt durch Lösung des LGS $(A - \lambda E)x = O$ den Eigenraum ausrechnen. Für einen Eigenwert λ muss die Lösungsmenge mindestens eindimensional sein (d.h. mindestens eine freie Variable).

Beispiel einer Drehmatrix: Das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ ist } p(\lambda) = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + 1.$$

Die Nullstellen, d.h. die Eigenwerte sind:

$$\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{\cos^2(\alpha) - 1}$$

Ein reeller Eigenwert existiert also nur, wenn $\cos(\alpha) = \pm 1$ gilt, also für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ (Drehungen um den Winkel 0 oder π). Allerdings existieren komplexe Eigenwerte, wenn man die Drehmatrix über \mathbb{C} betrachtet.

Satz 4.6.4 Sei A eine Dreiecksmatrix. Dann sind die Eigenwerte genau die Diagonaleinträge der Matrix.

Beweis: Sei A die folgende Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & * & * & * \\ 0 & b_2 & * & * \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt: $\det(A - \lambda E) = (b_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) \dots (b_n - \lambda)$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (d.h. die Eigenwerte) sind daher b_1, b_2, \dots, b_n . \square



Vorsicht: zur Bestimmung von Eigenwerten sind Zeilen- (oder Spalten-)umformungen nicht zugelassen. Diese lassen zwar den Rang und die Lösungsmenge von Gleichungssystemen unverändert, aber nicht die Eigenwerte und Eigenvektoren!

Satz 4.6.5 Sei A eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert. Dann ist die Dimension des Eigenraums zu λ höchstens so groß wie die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom.

Bemerkung 4.6.6 Die Dimension des Eigenraums zu λ heißt *geometrische Vielfachheit*, die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom *algebraische Vielfachheit*. Für alle Eigenwerte λ gilt: algebraische Vielfachheit \geq geometrische Vielfachheit.

Bei einfachen Nullstellen im charakteristischen Polynom ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums gleich 1 (algebraische und geometrische Vielfachheit sind 1). Bei mehrfachen Nullstellen kann die Dimension des Eigenraums kleiner sein als die algebraische Vielfachheit; in diesem Fall gibt es dann *keine Basis aus Eigenvektoren*.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Da A eine Dreiecksmatrix ist, folgt nach Satz 4.6.4:

$\lambda = 2$ ist der einzige Eigenwert. In der Tat gilt:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^3$$

Der Eigenwert $\lambda = 2$ hat die algebraische Vielfachheit 3. Zur Bestimmung des Eigenraums löst man das LGS:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Lösungsraum (Eigenraum) ist $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, hat also nur die Dimension 1. Da

es keine weiteren Eigenwerte gibt, gibt es nur einen unabhängigen Eigenvektor, d.h. es existiert keine Basis aus Eigenvektoren.

Symmetrische Matrizen besitzen allerdings “genügend viele” Eigenvektoren:

Satz 4.6.7 *Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix ($A = A^T$) über \mathbb{R} . Dann zerfällt das charakteristische Polynom über \mathbb{R} in n Linearfaktoren und es existiert sogar eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A .*

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ und die

zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. v_1 und v_2 sind orthogonal und die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{5}}v_1$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}v_2$ bilden eine ONB aus Eigenvektoren von A .

4.7 Koordinaten und Basiswechsel

Für die Vektorräume K^n steht uns die Standardbasis e_1, e_2, \dots, e_n zur Verfügung. Es lassen sich aber auch andere Basen verwenden.

Beispiel: $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -3e_1 + 4e_2$. Die Koordinaten sind $(-3, 4)$. Der Vektor v

lässt sich aber auch mit Hilfe der Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen:
 $v = b_1 + 2b_2$. Die Koordinaten sind dann $(1, 2)$.

Definition 4.7.1 Sei $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis eines n -dimensionalen Vektorraums V über K (z.B. K^n) und $v \in V$ ein Vektor. Dann heißen (c_1, c_2, \dots, c_n) Koordinaten (bzw. Koordinatenvektor) von v bezüglich der Basis B , falls gilt:

$$v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n$$

Die Koordinaten bzgl. der Standardbasis e_1, e_2, \dots, e_n heißen kartesische Koordinaten.

Beispiel (s.o.): $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ hat bezüglich der Standardbasis die kartesischen Koordinaten $(-3, 4)$ und bezüglich der Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $(1, 2)$.

Anwendungsbeispiel: Die Koordinaten bei der Darstellung eines komplexen Datenvektors bzgl. der Fourier-Basis des \mathbb{C}^n (siehe Beispiel (d), (e) zu Definition 4.3.6) heißen diskrete *Fourierkoeffizienten*. Sie liefern Informationen über die Frequenzverteilung. Im einfachen Fall $n = 2$ betrachtet man die Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gilt nun $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$, so ist die Koordinate c_1 der Tiefpass- und c_2 der Hochpassanteil (Frequenzen 0 bzw. $\frac{1}{2}$). Für einen allgemeinen Datenvektor der Länge n liefern die Koeffizienten der Fourier-Basis (die diskreten Fourier-Koeffizienten) die Frequenzanteile. Der Basiswechsel zur Fourier-Basis entspricht dann dem Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich und wird durch die Fast Fourier Transform (FFT) effizient berechnet.

In Zusammenhang mit linearen Abbildungen werden nun Basen gesucht, welche die jeweilige Abbildung auf möglichst einfache Weise beschreiben. Sei f eine

lineare Abbildung, die eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besitzt. Dann gilt für einen Vektor v mit den Koordinaten (c_1, c_2, \dots, c_n) bezüglich B :

$$v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n \implies f(v) = c_1 \lambda_1 b_1 + c_2 \lambda_2 b_2 + \dots + c_n \lambda_n b_n$$

Rechnet man also mit Koordinaten bezüglich $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, so wird die Abbildung durch die folgende einfache Diagonalmatrix dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allerdings muss dann mit der neuen Basis B gearbeitet werden, nicht mit der ursprünglichen Einheitsbasis! Der folgende Satz liefert ein Verfahren zur Transformation der Koordinaten:

Satz 4.7.2 Sei f die lineare Abbildung, die die Basis B_1 in die Basis B_2 abbildet. T sei die Abbildungsmatrix von f bezüglich B_1 , d.h. in den Spalten von T stehen die Basisvektoren von B_2 (in Koordinaten bezüglich B_1). T heißt dann Transformationsmatrix von B_1 nach B_2 .

- (a) Sei v ein Vektor mit Koordinaten bezüglich B_2 . Dann ist $T \cdot v$ der Koordinatenvektor von v bezüglich B_1 .
- (b) Sei umgekehrt w ein Vektor mit Koordinaten bezüglich B_1 . Dann ist $T^{-1}w$ der Koordinatenvektor bezüglich B_2 .

Beispiel (s.o.): $B_1 = \{e_1, e_2\}$ (Standardbasis) und $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dann gilt:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Koordinatenvektor $(-3, 4)$ bezüglich der Standardbasis geht dann in den Koordinatenvektor $T^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ über. Umgekehrt wird aus den Koordinaten

$(1, 2)$ bezüglich B_2 der Koordinatenvektor $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis.

Häufig möchte man die neue Basis im Definitions- **und** Zielbereich einer linearen Abbildung wählen. Der folgende Satz liefert die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis:

Satz 4.7.3 *Seien zwei Basen B_1 und B_2 gegeben. Sei A die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis B_1 und T die Transformationsmatrix von B_1 nach B_2 . Dann ist die Matrix $T^{-1}AT$ die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis B_2 .*

Beweis: Wendet man die Matrix $T^{-1}AT$ auf einen Koordinatenvektor v bezüglich B_2 an, so erhält man:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot v$$

Man analysiert dieses Produkt von rechts nach links: der Vektor v ist bezüglich der Basis B_2 gegeben. Dann ist Tv der Koordinatenvektor von v bezüglich B_1 . Die Abbildungsmatrix A ist bezüglich B_1 gegeben, also ist $A \cdot (Tv)$ dann der Bildvektor von v bezüglich B_1 . Schließlich ist $T^{-1} \cdot (A \cdot (Tv)) = (T^{-1}AT)v$ der Bildvektor von v bezüglich der Basis B_2 . Also ist $T^{-1}AT$ die Abbildungsmatrix von f bezüglich B_2 .

Definition 4.7.4 *Zwei quadratische Matrizen A und B heißen ähnlich, falls eine invertierbare Matrix T existiert mit $B = T^{-1}AT$.*

Matrizen sind also ähnlich, falls sie bezüglich geeigneter (und im Allgemeinen verschiedener Basen) dieselbe lineare Abbildung beschreiben. Der Übergang der Basen wird durch T beschrieben.

Der Basiswechsel wird insbesondere in Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie verwendet. Bezüglich einer Basis von Eigenvektoren wird eine lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix dargestellt:

Satz 4.7.5 *Sei $f : K^n \rightarrow K^n$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der Einheitsbasis $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ durch eine Matrix A beschrieben werde. Falls A eine Basis $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren besitzt, so wird f bezüglich B_2 durch eine Diagonalmatrix dargestellt. Sei T die Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren v_1, v_2, \dots, v_n sind, und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1} A T$$

In diesem Fall heißt A diagonalisierbar, d.h. ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Beweis: Dies folgt daraus, dass $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren ist, und T den Basiswechsel von der Standardbasis nach B_2 beschreibt.

Beispiele:

- (a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 36 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$. Wir bestimmen zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren.
Es gilt:

$$\det(A - \lambda E) = (-2 - \lambda)(-8 - \lambda) - 216 = \lambda^2 + 10\lambda - 200$$

Die Nullstellen (Eigenwerte) sind $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = -20$. Der Eigenraum zu λ_1 ist die Lösungsmenge des Systems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -12 & 36 & 0 \\ 6 & -18 & 0 \end{array} \right)$$

Wir erhalten den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist die Lösungsmenge des Systems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & 36 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

Wir erhalten den Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\{v_1, v_2\}$ bildet eine Basis (nicht orthogonal) des \mathbb{R}^2 , die Transformationsmatrix ist $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} = T^{-1}AT$$

- (b) Sei $E = \langle v_1, v_2 \rangle$ die Ebene mit den (orthogonalen und normierten) Richtungsvektoren

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist die Abbildungsmatrix A , die (bezüglich der üblichen Standardbasis) die Spiegelung an der Ebene E beschreibt. Zunächst bestimmt man mit Hilfe des Vektorproduktes einen (normierten) Vektor v_3 , der senkrecht zu v_1 und v_2 ist:

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 . Die Spiegelung wird bezüglich B durch die folgende einfache Spiegelungsmatrix beschrieben:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis ist dann $A = TST^{-1}$, wenn T die Transformation von der Einheitsbasis in B beschreibt; die Spalten von T sind gerade die Vektoren v_1, v_2, v_3 . Man beachte, dass wir hier von der (neuen) Basis B in die Standardbasis (zurück-)transformieren! T ist nach Konstruktion eine orthogonale Matrix, d.h. es gilt $T^{-1} = T^T$.

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten dann die gesuchte Abbildungsmatrix

$$A = TST^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Man überprüft, dass Vektoren aus der Spiegelungsebene E invariant bleiben, d.h. es gilt $Av_1 = v_1$ und $Av_2 = v_2$. Außerdem wird v_3 durch die Spiegelung auf $Av_3 = -v_3$ abgebildet.

Die folgende Aussage folgt aus Satz 4.6.7:

Satz 4.7.6 *Sei A eine symmetrische reelle Matrix. Dann existiert eine orthogonale Matrix T so dass $T^{-1}AT = T^TAT$ eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonaleinträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A .*

Folgerung: Symmetrische Matrizen lassen sich durch Basiswechsel mit einer ONB in eine Diagonalmatrix überführen. Sei also $D = T^TAT$, so dass $A = TDT^T$

gilt. Seien v_1, \dots, v_n die Spaltenvektoren von T . Daraus ergibt sich die folgende *Spektralzerlegung*:

$$A = \lambda_1 \cdot v_1 \cdot v_1^T + \dots + \lambda_n \cdot v_n \cdot v_n^T$$

Man beachte, dass $v_i \cdot v_i^T$ (Spaltenvektor mal Zeilenvektor) eine $n \times n$ Matrix ergibt. A lässt sich also in eine Summe dieser speziellen Matrizen vom Rang 1 zerlegen und kann aus ihren Eigenwerten ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$) und den Eigenvektoren (Spalten der Matrix T) rekonstruiert werden. Für die Analyse und auch zur Datenkompression ist interessant, dass man Summanden λ_i weglassen kann, die gleich (oder näherungsweise) 0 sind.

Beispiel: Sei folgende symmetrische Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1.344 & -0.689 & 1.311 \\ -0.689 & 0.378 & -0.622 \\ 1.311 & -0.622 & 1.3778 \end{pmatrix}$$

Man berechnet (z.B. mit Computereinsatz) die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0,1$ und $\lambda_3 = 0$. Daher ist (im wesentlichen) nur der Eigenraum zum Eigenwert λ_1 relevant. Ein normierter Eigenvektor zu λ_1 (d.h. der erste Spaltenvektor von T) ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.667 \\ -0.333 \\ 0.667 \end{pmatrix}$$

Nun lässt sich A mit Hilfe von v_1 und dem Eigenwert $\lambda_1 = 3$ nähern:

$$A \approx 3v_1v_1^T = \begin{pmatrix} 1.333 & -0.667 & 1.333 \\ -0.667 & 0.333 & -0.667 \\ 1.333 & -0.667 & 1.333 \end{pmatrix}$$

Exkurs Singulärwertzerlegung: Sei A nun eine beliebige $m \times n$ Matrix. A ist im Allgemeinen nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix und besitzt keine Spektralzerlegung, aber immerhin noch eine Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition, SVD): durch Basiswechsel mit einer orthogonalen Matrix im Definitionsbereich K^n und einer weiteren orthogonalen Matrix im Zielbereich K^m wird A in eine $m \times n$ Matrix in Diagonalfom überführt. Diese Zerlegung gehört zu den wichtigen Hilfsmitteln beim Data Mining, d.h. der Extraktion von nützlichen Informationen aus Daten, die man häufig als Matrix (z.B. einer Folge von Zeilenvektoren) darstellen kann.

Satz 4.7.7 Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix vom Rang r . Dann existiert eine orthogonale $n \times n$ Matrix V , eine orthogonale $m \times m$ Matrix U und eine $m \times n$ Matrix S in Diagonalform mit r Diagonaleinträgen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, so dass

$$A = USV^T$$

gilt. Seien u_1, \dots, u_n die Spaltenvektoren von U und v_1, \dots, v_m die Spaltenvektoren von V . Dann folgt

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$$

Beweis: $A^T A$ ist eine symmetrische $n \times n$ Matrix und besitzt nach Satz 4.6.7 eine ONB v_1, \dots, v_n aus Eigenvektoren mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sei V die orthogonale Matrix mit den Spaltenvektoren v_1, \dots, v_n . Die Bildvektoren Av_1, \dots, Av_n sind orthogonal (oder Null), weil

$$(Av_i)^T (Av_j) = v_i^T A^T Av_j = v_i^T \lambda_j v_j = \lambda_j v_i^T v_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

Da $\text{rg}(A) = r$ gilt, können wir annehmen, dass Av_1, \dots, Av_r ungleich dem Nullvektor sind, mit absteigender Norm angeordnet sind und $Av_{r+1} = \dots = Av_n = 0$ gilt. Setze $\sigma_i = \|Av_i\|$ und $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$ für $i = 1, \dots, r$. Erweitere dies zu einer ONB u_1, u_2, \dots, u_m des K^m und sei U die orthogonale Matrix mit diesen Spaltenvektoren. Nach Konstruktion ist die i -te Spalte von AV dann gleich dem Vektor $\sigma_i u_i$ für $i = 1, \dots, r$ bzw. gleich dem Nullvektor für $i > r$. Sei S die $m \times n$ Matrix in Diagonalform, deren Diagonaleinträge $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sind. Daraus folgt:

$$AV = US \implies A = USV^{-1} = USV^T \quad \square$$

Bemerkung: Die Diagonaleinträge $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ heißen *Singulärwerte*, die Spaltenvektoren von U bzw. V heißen *Links-* bzw. *Rechts-Singulärvektoren*.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. A hat die folgende Singulärwertzerlegung:

$$A = USV^T = \begin{pmatrix} -0.316 & -0.949 \\ -0.949 & 0.316 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11.832 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.267 & -0.534 & -0.802 \\ 0.534 & 0.610 & -0.585 \\ 0.802 & -0.585 & 0.123 \end{pmatrix}$$

Die wesentliche Information liefert der Singulärwert $\sigma_1 = 11.832$, die orthogonalen Matrizen U (links) und V^T (rechts) führen einen Basiswechsel durch. Sei u_1 die erste Spalte von U und v_1^T die erste Zeile von V^T (erste Spalte von V). Da A den Rang 1 hat, kann die Matrix mit σ_1 , u_1 und v_1 rekonstruiert werden:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T$$

Ausgleichsrechnung. Die Singulärwertzerlegung kann auch zur Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate verwendet werden. Gegeben sei ein

überbestimmtes lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Wir nehmen an, dass A eine $n \times m$ Matrix ist, $n > m$ und $\text{rg}(A) = m$ gilt, so dass das LGS in der Regel keine Lösung besitzt. Gesucht ist ein Vektor x so dass die Norm des Residuenvektors $r = Ax - b$ möglichst klein ist (d.h. kleinste Quadrate). Die Singulärwertzerlegung von A liefert $A = USV^T$. Man erhält

$$Ax - b = r \iff USV^T x - b = r \iff SV^T x - U^T b = U^T r$$

Setzt man $y = V^T x$ und $c = U^T b$, so genügt es nun, die Norm von $S \cdot y - c$ zu minimieren, da U orthogonal ist und $\|r\| = \|U^T r\|$ gilt. Die Matrix S hat aber Diagonalform und besteht aus einer regulären $m \times m$ Diagonalmatrix, die wir mit \tilde{S} bezeichnen, und $n - m$ Nullzeilen. Das transformierte Ausgleichsproblem ($Sy - c$ minimieren) löst man, indem man nur die ersten m Zeilen betrachtet. Sei \tilde{c} der Vektor der ersten m Einträge von c . Dann hat $\tilde{S}y - \tilde{c} = 0$ die Lösung $y = \tilde{S}^{-1}\tilde{c}$ und für die Lösung des ursprünglichen Problems erhält man

$$x = V \cdot \tilde{S}^{-1} \cdot \widetilde{U^T b}.$$

Beispiel zur Ausgleichsrechnung. Betrachte das unlösbare LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^2$, so dass die Norm des Residuenvektors $\|Ax - b\|$ (d.h. der Fehler) minimal ist. Die Singulärwertzerlegung von A ist $A = USV^T$ mit

$$U = \begin{pmatrix} -0.72 & 0.45 & -0.54 \\ -0.36 & -0.89 & -0.27 \\ -0.60 & 0.00 & 0.80 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3.74 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -0.45 & 0.89 \\ -0.89 & -0.45 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Vektor ist $x = V \cdot \tilde{S}^{-1} \cdot \widetilde{U^T b}$, wobei \tilde{S} und $\widetilde{U^T b}$ jeweils durch Streichen der dritten Zeile entstehen. Man erhält

$$x = \begin{pmatrix} 0.71 \\ 1.93 \end{pmatrix}$$

Der Residuenvektor ist $r = Ax - b = \begin{pmatrix} -1.71 \\ -0.86 \\ 2.58 \end{pmatrix}$ und $\|r\| \approx 3.21$.

4.8 Homogene Koordinaten

Viele Transformationen können durch lineare Abbildungen beschrieben werden, leider aber keine Verschiebungen, da lineare Abbildungen ja stets den Nullpunkt invariant lassen. Durch einen kleinen Trick lassen sich aber auch die sogenannten *affinen* Abbildungen mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Man verwendet die *homogenen* Koordinaten: der K^n wird in den K^{n+1} eingebettet, indem man die letzte Koordinate 1 setzt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto [x_1, x_2, \dots, x_n, 1]$$

Beispiel: die Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ werden auf $[x, y, 1] \in \mathbb{R}^3$ abgebildet. Entsprechend wird $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf $[x, y, z, 1]$ abgebildet. Die homogenen Koordinaten werden dabei durch eckige Klammern dargestellt.

Definition 4.8.1 Die homogenen Koordinaten von $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ sind $[x_1, x_2, \dots, x_n, 1] \in K^{n+1}$.

Der zentrale Vorteil der homogenen Koordinaten sind zusätzliche Matrixtransformationen, die auch Verschiebungen ermöglichen.

Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit homogenen Koordinaten $[x, y, 1]$. Dann gilt:

$$T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

T überführt $[x, y, 1]$ in $[x + t_x, y + t_y, 1]$, d.h. T beschreibt eine Verschiebung um (t_x, t_y) , was mit klassischen Koordinaten nicht möglich wäre.

Die üblichen linearen Abbildungen des \mathbb{R}^2 lassen sich weiterhin darstellen, indem man den üblichen (2×2) -Matrizen eine (3×3) -Matrix zuordnet:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Transformation mit homogenen Koordinaten sind alle Matrizen zugelassen, deren letzte Zeile die Form $(0 \dots 0 \ 1)$ hat. Dies gewährleistet, dass die letzte Koordinate auch nach der Transformation gleich 1 ist, d.h. dass es sich um homogene Koordinaten handelt. Häufig werden mehrere Transformationen hintereinander ausgeführt; die gesamte Abbildung ergibt sich dann einfach durch Multiplikation

der Matrizen.

Beispiel: im \mathbb{R}^2 soll um den Vektor $(1, 2)$ verschoben und anschließend um $\frac{\pi}{4}$ um den Ursprung gedreht werden. Wir verwenden homogene Koordinaten. Die Verschiebung hat die Matrix

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Drehung (um den Nullpunkt) entspricht der Matrix

$$T_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Hintereinanderausführung ergibt die Matrix

$$T_2 T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel wird $P = [0, 0, 1]$ (der Nullpunkt in homogenen Koordinaten) durch Verschiebung und Drehung auf $P'' = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1]$ abgebildet (d.h. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ in klassischen Koordinaten) und $Q = [3, 1, 1]$ auf $Q'' = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}, 1]$ (siehe Abbildung 28).

Auf ähnliche Weise können auch homogenen Koordinaten im Raum verwendet werden. Diese haben die Form $[x, y, z, 1]$. Transformationen werden mit Hilfe von (4×4) Matrizen vorgenommen, deren vierte Zeile $(0 \ 0 \ 0 \ 1)$ ist. Verschiebungen um (t_x, t_y, t_z) werden beschrieben durch:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Drehung um den Winkel α um die z -Achse hat die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

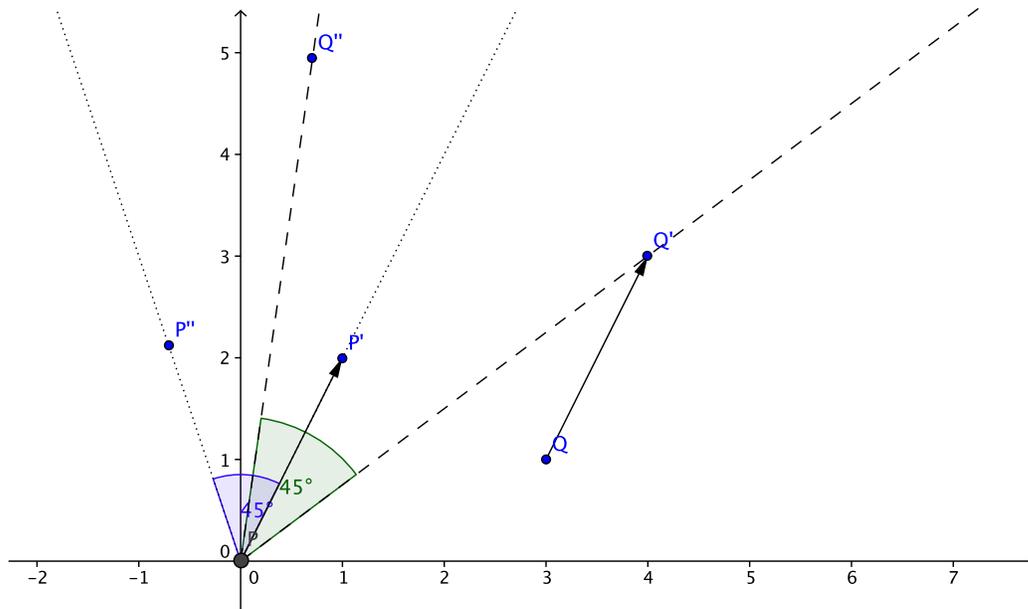


Abbildung 28: Verschiebung um $(1, 2)$ und anschließend Drehung um $\frac{\pi}{4}$ von $P = (0, 0)$ und $Q = (3, 1)$. Die Verschiebung überführt P in P' bzw. Q in Q' und die Drehung dann P' in P'' bzw. Q' in Q'' .

Auf ähnliche Weise werden auch Drehungen um die x - und y -Achse beschrieben.

Solche affinen Transformationen werden z.B. in der Computergrafik und in der Robotik verwendet. Dabei lassen sich mit homogenen Koordinaten auch Transformationen von Koordinatensystemen ähnlich wie Basiswechsel im vorigen Abschnitt beschreiben. Durch Bewegungen (Translationen und Drehungen) des Roboters (bzw. seiner Arme und Gelenke) verändert sich sein Koordinatensystem und durch Multiplikation der zugehörigen einzelnen Matrizen erhält man eine 4×4 Transformationsmatrix, die das neue Koordinatensystem mit Hilfe des ursprünglichen (Weltkoordinaten-)Systems beschreibt. Dabei ergeben die ersten drei Spalten die neuen Basisvektoren (d.h. die neue Orientierung des Roboters bzw. seines Greifarms) und die vierte Spalte liefert seine neue Position in homogenen Koordinaten (d.h. die Verschiebung).

Beispiel: Eine Drehung um die z -Achse um den Winkel α und eine anschließende Verschiebung um (t_x, t_y, t_z) ergibt als Transformationsmatrix das Produkt der o.a. Matrizen T und A :

$$T \cdot A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & t_x \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die neue Orientierung sind die Richtungen (Basisvektoren) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Verschiebung ist (t_x, t_y, t_z) . Bei Verkettung mehrerer Bewegungen ist das Ergebnis natürlich weniger einfach vorherzusehen.

5 Funktionen von mehreren Variablen

5.1 Einführung

Bisher wurden im Rahmen der Analysis Funktionen **einer** unabhängigen Variablen betrachtet, die durch Gleichungen $y = f(x)$ beschrieben wurden. Nun erweitern wir dies auf Funktionen von mehreren Veränderlichen, die dann durch Gleichungen

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

beschrieben werden. Die n unabhängigen Variablen sind hier x_1, x_2, \dots, x_n . Im Fall von 2 Variablen kann man z.B. auch

$$z = f(x, y)$$

Wie in der Linearen Algebra können wir auch vektorwertige Funktionen mit dem Zielbereich \mathbb{R}^m betrachten:

$$K = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Die einzelnen Komponenten $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sind wiederum reellwertige Funktionen.

Definition 5.1.1 *Eine reellwertige Funktion von n Variablen ist eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Eine vektorwertige Funktion von n Variablen ist eine Funktion $K = (f_1, \dots, f_m) : D_f \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Reellwertige Funktionen werden auch als Skalarfelder oder Skalarfunktionen, vektorwertige Funktionen werden auch als Vektorfelder bezeichnet.*

Beispiele:

- (a) $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $U(R, I) = RI$: die Spannung am Ohmschen Widerstand ist eine reellwertige Funktion (ein Skalarfeld) der Variablen R (Widerstand) und I (Stromstärke).
- (b) $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: der Abstand eines Punktes (x, y, z) im Raum vom Nullpunkt ist eine reellwertige Funktion (Skalarfeld).
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist eine reellwertige Funktion (ein Skalarfeld); jedem Punkt (x, y) wird eine reelle Zahl $z = x^2 + y^2$ zugeordnet. Der Graph kann im \mathbb{R}^3 dargestellt werden (siehe Abbildung 29 links). Alternativ lassen sich auch Höhenlinien (Contour-Plot) verwenden (siehe Abbildung 29 rechts); dabei werden die z -Werte durch Höhenlinien oder Farben bzw. Grauwerte dargestellt.
- (d) $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $K(x, y, z) = (-y, x, 0)$ ist ein Vektorfeld (siehe Abbildung 30); jedem Punkt (x, y, z) wird der Vektor $(-y, x, 0)$ "angeheftet" (zugeordnet). Die Komponentenfunktionen von K sind $f_1(x, y, z) = -y$, $f_2(x, y, z) = x$ und $f_3(x, y, z) = 0$.

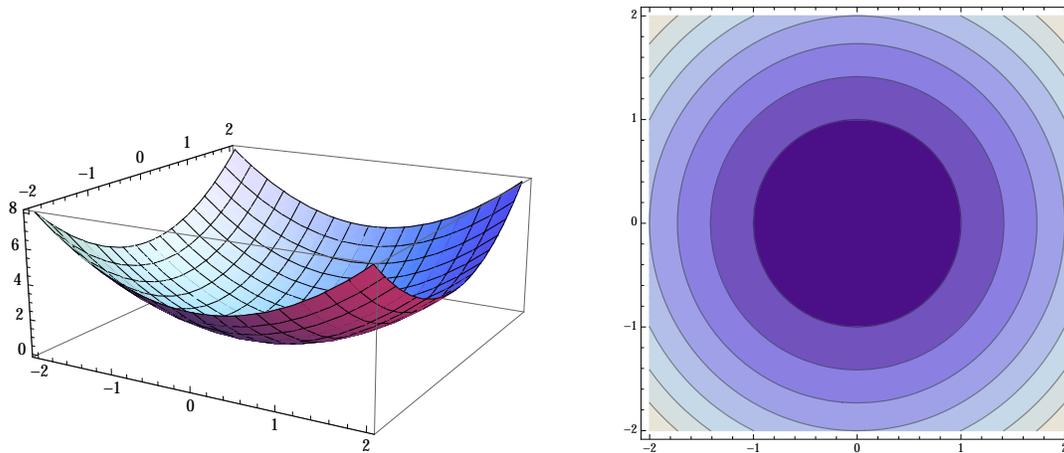


Abbildung 29: Graph und Höhenlinien der reellwertigen Funktion $z = x^2 + y^2$.

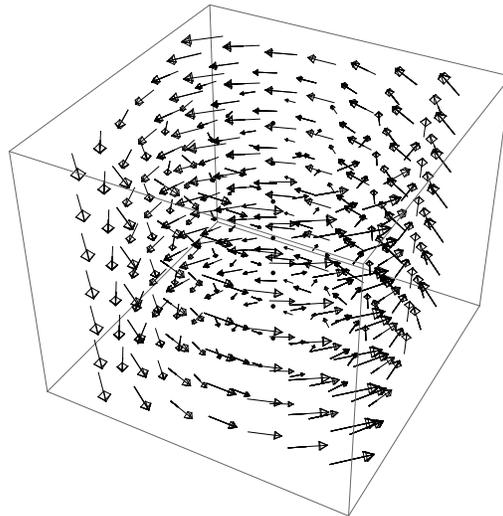


Abbildung 30: Vektorfeld $K(x, y, z) = (-y, x, 0)$ im \mathbb{R}^3

5.2 Grenzwert und Stetigkeit

Die im eindimensionalen Fall bekannten Begriffe werden nun auf den \mathbb{R}^n erweitert. Die Rolle des reellen Betrages wird durch die aus der Linearen Algebra bekannte Norm von Vektoren übernommen:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Insbesondere beschreibt dann für ein reelles $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \epsilon\}$ eine “ ϵ -Kugel” oder “ ϵ -Ball” um $a \in \mathbb{R}^n$ (siehe Abbildung 31):

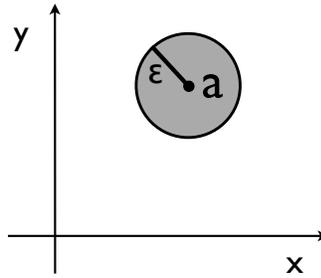


Abbildung 31: ϵ -Ball um a im \mathbb{R}^2 .

Definition 5.2.1 $a \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert einer Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren des \mathbb{R}^n , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für $k \geq n_0$ gilt:

$$\|a_k - a\| < \epsilon$$

Das bedeutet: für jede kleine ϵ -Kugel um a liegen ab dem dem Index n_0 alle Folgenglieder a_k innerhalb dieser Kugel. Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$$

Satz 5.2.2 Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren im \mathbb{R}^n , die komponentenweise gegen x_1, x_2, \dots, x_n konvergieren. Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: Betrachte die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} \\ \frac{\sin(k)}{k+1} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}$. Dann gilt (siehe Abbildung 32):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun sollen Grenzwerte für reellwertige Funktionen von mehreren Veränderlichen definiert werden.

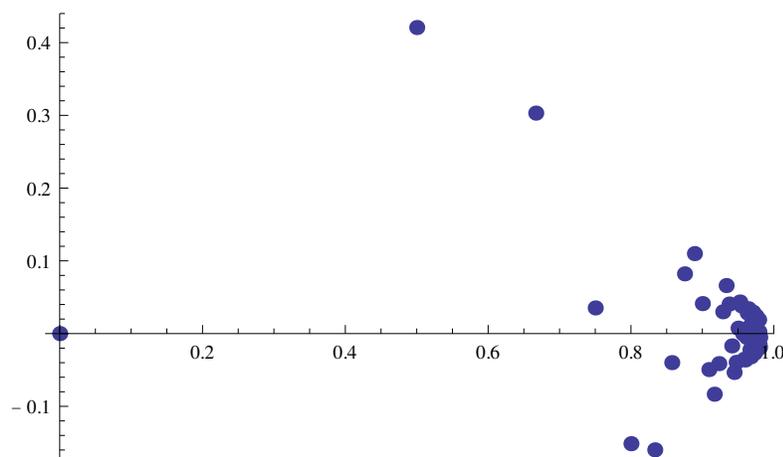


Abbildung 32: Folgenglieder der zweidimensionalen Folge $(\frac{k}{k+1}, \frac{\sin(k)}{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$

Definition 5.2.3 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Wenn für jede Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit den Voraussetzungen

- (a) $a_k \in D_f$ für alle k
- (b) $a_k \neq a$ für alle k
- (c) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$

die Folge $(f(a_k))_{k \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen einen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ konvergiert, so heißt g Grenzwert von f an der Stelle a und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$$

Beispiel: $f(x, y) = \frac{2y^2 - 2x^2}{x - y}$. Wir untersuchen den Grenzwert von f an der Stelle $(1, 1)$. Sei dazu $(a_k) = (x_k, y_k)$ eine beliebige Folge mit $x_k \neq y_k$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (1, 1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2y_k^2 - 2x_k^2}{x_k - y_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2(y_k - x_k)(y_k + x_k)}{-(y_k - x_k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} -2(y_k + x_k) = -2(1 + 1) = -4 \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = -4$$

Mit Hilfe des Grenzwertes kann nun die Stetigkeit definiert werden.

Definition 5.2.4 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D_f \subset \mathbb{R}^n$. f heißt stetig bei a , falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und mit $f(a)$ übereinstimmt, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Beispiel:

Definiere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(siehe Abbildung 33). f ist in den Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig, denn:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x^2 + y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)$$

Im Punkt $(0, 0)$ ist die Funktion unstetig. Dazu betrachten wir die Folge $a_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Es gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (0, 0)$, aber:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{k})^2}{2(\frac{1}{k})^2} = \frac{1}{2}$$

Der Grenzwert für diese spezielle Folge ist also nicht $f(0, 0) = 0$! Daraus folgt bereits, dass f in $(0, 0)$ unstetig ist.

Betrachten wir nun zusätzlich eine weitere Folge $a_k = (\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$, so gilt ebenso $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (0, 0)$, aber:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\left(\frac{1}{k}\right)^2}{2\left(\frac{1}{k}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

Die Funktion ist daher für jede Wahl von $f(0, 0)$ unstetig !

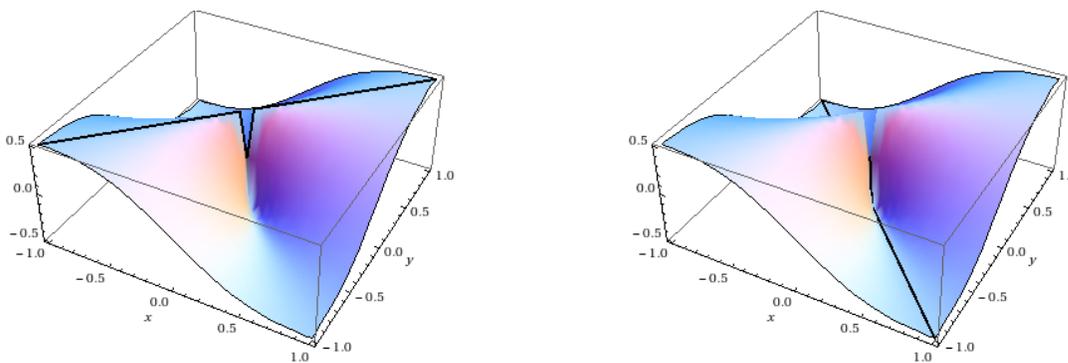


Abbildung 33: Graph von $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ mit Unstetigkeit bei $(0, 0)$. Die Grenzwerte für $y = x$ (links) bzw. $y = -x$ (rechts) unterscheiden sich.

5.3 Partielle Ableitungen und Gradient

Für die Definition von Ableitungen benötigen wir Funktionen, die auch in einer *Umgebung* der betrachteten Stelle definiert sind.

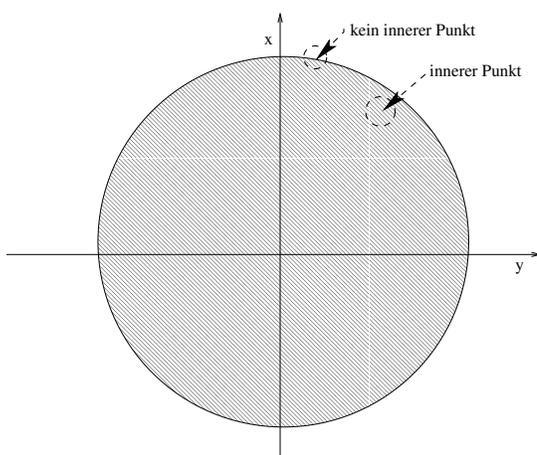


Abbildung 34: Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$

Definition 5.3.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Sei $a \in D$. a heißt innerer Punkt von D , falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die ϵ -Kugel

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \epsilon\}$$

eine Teilmenge von D ist (d.h. vollständig innerhalb von D liegt).

(b) D heißt offen, falls jeder Punkt $a \in D$ ein innerer Punkt ist.

Beispiel: Sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Einheitskreisscheibe, siehe Abbildung 34). Nur die Punkte im Inneren des Kreises (deren Abstand zum Nullpunkt echt kleiner 1 ist) sind innere Punkte von K .

Die partielle Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher gibt die Steigung in einer bestimmten Koordinatenrichtung an. Partielle Ableitungen werden auch als Richtungsableitungen bezeichnet.

Definition 5.3.2 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $a = (a_1, \dots, a_n)$ ein innerer Punkt von D_f . e_i sei der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^n . f heißt dann partiell differenzierbar an der Stelle a bezüglich der i -ten Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

existiert, den man in diesem Fall mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ bezeichnet. f heißt (insgesamt) partiell differenzierbar an der Stelle a , falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existieren. Durch Variation von a entstehen neue Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (die partiellen Ableitungen nach x_i). Ein Vektorfeld $K = (f_1, \dots, f_m)$ heißt partiell differenzierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m partiell differenzierbar sind.



Partielle Ableitungen nach x_i können berechnet werden, indem man alle Variablen bis auf x_i als konstant ansieht, und dann wie im eindimensionalen Fall nach x_i ableitet.

Beispiel: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ bzw. $f(0, 0) = 0$ (s.o.). Für $(x, y) \neq (0, 0)$ berechnet man dann die partielle Ableitung nach x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Man leitet also wie gewöhnlich nach x ab und sieht y als Konstante an. Analog bestimmt man $\frac{\partial f}{\partial y}$. Wir betrachten nun noch die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$. Dazu verwenden wir die Definition:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Analog folgert man: $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. f ist also partiell differenzierbar, aber nicht stetig in $(0, 0)$!

Bemerkung:

Bemerkung 5.3.3 Für $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gibt die partielle Ableitung nach x_i die Wirkung einer Änderung des x_i -Wertes auf den z -Wert in einer Umgebung um a an, d.h.

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \Delta x_i$$

Der Gradient ist der Vektor der Richtungsänderungen:

Definition 5.3.4 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D_f$ ein innerer Punkt und f bei a partiell differenzierbar. Dann heißt

$$(\text{grad } f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

der Gradient von f an der Stelle a . Durch Variation von a erhält man das Vektorfeld $\text{grad}(f) = \text{grad } f$. Für $\text{grad } f$ ist auch die Bezeichnung ∇f ("Nabla" f) üblich.

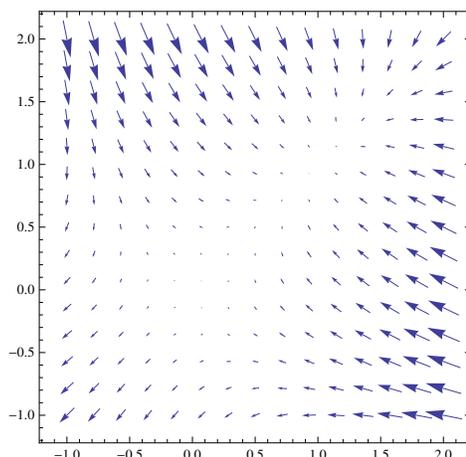


Abbildung 35: Gradienten-Vektorfeld von $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$. Es gilt $\text{grad } f = (-3x^2 + 3y, -3y^2 + 3x)$. An den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ ist der Gradient gleich dem Nullvektor.

Wenn man jedem Punkt $a \in D_f$ seinen Gradienten “anheftet”, so erhält man ein Vektorfeld. Der Gradientenvektor bei a zeigt in die Richtung des maximalen Zuwachses von f an der Stelle a !

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen lassen sich weitere Differentialoperatoren (Rotation und Divergenz) angeben, die in der Vektoranalysis und z.B. für die Elektrodynamik eine wichtige Rolle spielen.

Definition 5.3.5 (a) Sei $K = (f_1, f_2, f_3)$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^3 (oder einer offenen Teilmenge). Dann definiert man das Vektorfeld $\text{rot } K$ durch:

$$\text{rot}(K) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Die Rotation gibt die Wirbeldichte eines Vektorfeldes an.

(b) Sei $K = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n (oder einer offenen Teilmenge). Dann definiert man das Skalarfeld $\text{div}(K)$ durch:

$$\text{div}(K) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Die Divergenz gibt die Quelledichte eines Vektorfeldes an.

Beispiele: $K(x, y, z) = (-y, x, 0)$ (siehe Abbildung 30). Dann gilt: $\text{rot}(K) = (0, 0, 2)$ (Wirbel um die z -Achse) und $\text{div}(K) = 0$ (quellfreies Feld). Betrachtet man dagegen $L(x, y, z) = (x, y, z)$ (ein Zentralfeld, siehe Abbildung 36), so gilt $\text{rot}(L) = (0, 0, 0)$ (wirbelfrei) und $\text{div}(L) = 3$ (konstante Quellstärke).

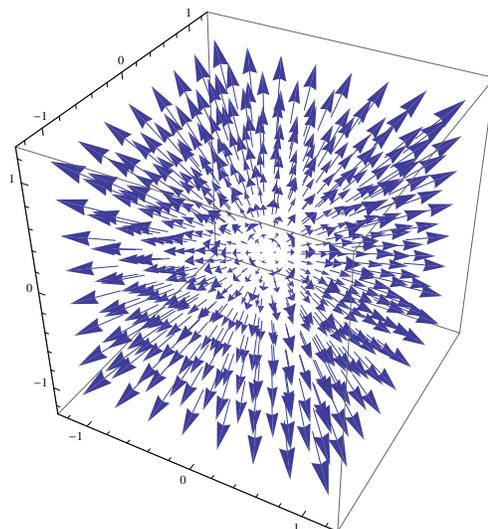


Abbildung 36: Zentralfeld $L(x, y, z) = (x, y, z)$

Sind die partiellen Ableitungen wieder partiell differenzierbar, so kann man **höhere partielle Ableitungen** bilden.

Definition 5.3.6 Sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wenn alle partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ wieder partiell differenzierbar sind, so heißt f zweimal partiell differenzierbar. Die zweiten partiellen Ableitungen werden mit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

bezeichnet. Entsprechend werden die höheren partiellen Ableitungen definiert. Für die k -fache partielle Ableitung nach einer Variablen x_i schreibt man

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial^k f}{(\partial x_i)^k}.$$

Beispiel: $f(x, y) = 3x^2y$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Satz 5.3.7 Sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -fach partiell differenzierbare Funktion und seien alle partiellen Ableitungen (bis zur Ordnung k) stetig. Dann kann bei einer gemischten k -fachen partiellen Ableitung die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden.

Beispiel: $f(x, y) = 3x^2y$. Dann gilt (s.o.): $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Satz 5.3.8 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D_f$ ein innerer Punkt und $z = f(x_1, \dots, x_n)$ in $x = a$ partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann beschreibt die Gleichung

$$z = f(a) + (\text{grad } f)(a) \cdot (x - a)$$

die Linearisierung oder lineare Approximation von f in der Umgebung von a . Diese Gleichung beschreibt auch die Tangential(hyper)ebene von f an der Stelle a .

Vergleiche: für $n = 1$, d.h. Funktionen $y = f(x)$ von einer Variablen gilt die folgende Gleichung für die Tangente an der Stelle a (vgl. Mathematik 1):

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Setzt man $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, so ergibt sich folgende Koordinaten-

darstellung der Linearisierung:

$$\begin{aligned} z &= f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \dots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \\ &= f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \end{aligned}$$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^{-2y}$. Dann gilt:

$$\text{grad } f = (e^{-2y}, -2xe^{-2y})$$

Wir linearisieren f in der Umgebung von $a = (1, 1)$. Dann gilt: $f(1, 1) = e^{-2}$ und $(\text{grad } f)(a) = (e^{-2}, -2e^{-2})$. Also hat die Linearisierung von f die Gleichung

$$z = e^{-2} + (e^{-2}, -2e^{-2}) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = e^{-2} + e^{-2}(x-1) - 2e^{-2}(y-1) = e^{-2}x - 2e^{-2}y + 2e^{-2}$$

Das schreibt man auch als:

$$e^{-2}x - 2e^{-2}y - z = -2e^{-2}$$

Dies ist die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion f an der Stelle a . Der

Vektor $\begin{pmatrix} e^{-2} \\ -2e^{-2} \\ -1 \end{pmatrix}$ und seine Vielfachen sind Normalenvektoren der Tangentialebene.

5.4 Extremwerte

Auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher können lokale Extremwerte mit den Mitteln der Differentialrechnung bestimmt werden.

Definition 5.4.1 Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, besitzt an dem inneren Punkt $a \in D_f$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls für alle x in einer kleinen Kugel um a gilt:

$$f(x) \leq f(a) \text{ bzw. } f(x) \geq f(a)$$

Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Bei Funktionen einer Veränderlichen war dafür die Bedingung $f'(x) = 0$ (d.h. eine waagerechte Tangente, d.h. Tangente parallel zur x -Achse) notwendig. Die Verallgemeinerung dazu im Fall mehrerer Veränderlichen ist die Bedingung $\text{grad } f = (0, \dots, 0)$, d.h. die Tangential(hyper-)ebene ist parallel zur (x_1, x_2, \dots, x_n) -Ebene.

Satz 5.4.2 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Sei a ein innerer Punkt von D_f und f sei in a partiell differenzierbar. Wenn f dann bei a ein lokales Extremum besitzt, so gilt:

$$(\text{grad } f)(a) = (0, 0, \dots, 0)$$

Man bezeichnet a als stationäre Stelle.

Bemerkung 5.4.3 Aus der Bedingung $(\text{grad } f)(a) = (0, 0, \dots, 0)$ folgert man, dass die Tangentialhyperebene die Gleichung $z = f(a)$ besitzt, d.h. parallel zur (x_1, x_2, \dots, x_n) -Ebene ist (waagerechte Tangentialhyperebene).



Die stationären Stellen erhält man, indem man den Gradienten bestimmt, alle Komponenten gleich Null setzt und die Gleichungen auflöst.

Beispiele:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann gilt: $\text{grad } f = (2x, 2y)$. Aus $\text{grad } f = (0, 0)$ folgt $(x, y) = (0, 0)$, d.h. dies ist die einzige stationäre Stelle.

- (b) $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$. Dann gilt: $\text{grad } f = (-3x^2 + 3y, -3y^2 + 3x)$ (siehe Abbildung 35). Wir lösen das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3x^2 + 3y &= 0 \\ -3y^2 + 3x &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $y = x^2$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:

$$-3x^4 + 3x = 0 \Rightarrow -3x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1$$

Im Fall $x = 0$ folgt $y = 0$. Im Fall $x = 1$ folgt $y = 1$. Die potentiellen Extremstellen sind $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Für ein hinreichendes Kriterium werden wir die sog. Hesse-Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen betrachten.

Definition 5.4.4 Sei A eine quadratische, symmetrische $n \times n$ Matrix über \mathbb{R} .

- (a) A heißt positiv definit, falls alle Eigenwerte von A positiv (> 0) sind.
 (b) A heißt negativ definit, falls alle Eigenwerte von A negativ (< 0) sind.
 (c) A heißt indefinit, falls A positive und negative Eigenwerte besitzt.

Definition 5.4.5 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D_f$ ein innerer Punkt und f in a zweimal stetig partiell differenzierbar. Die Hesse-Matrix von f am Punkt a ist die symmetrische $n \times n$ Matrix

$$(\text{H } f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$$

Durch Variation von a erhält man die von x_1, x_2, \dots, x_n abhängige Hesse-Matrix $\text{H } f = \text{H}(f)$.

Bemerkung 5.4.6 (a) Für $n = 1$ und eine Funktion $f(x)$ besteht die Hesse-Matrix nur aus der zweiten Ableitung $f''(x)$.

- (b) Für $n = 2$ und eine Funktion $f(x, y)$ ist die Hesse-Matrix die 2×2 Matrix der zweifachen partiellen Ableitungen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Der folgende Satz gibt ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema an:

Satz 5.4.7 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D_f$ ein innerer Punkt, f bei a zweimal stetig differenzierbar und gelte

$$(\text{grad } f)(a) = 0$$

- (a) Falls $(\text{H } f)(a)$ positiv definit ist, so besitzt f bei a ein lokales Minimum.
- (b) Falls $(\text{H } f)(a)$ negativ definit ist, so besitzt f bei a ein lokales Maximum.
- (c) Falls $(\text{H } f)(a)$ indefinit ist, so besitzt f bei a kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

Bemerkungen:

- (a) Für $n = 1$ erhält man das bekannte hinreichende Kriterium für lokale Extremstellen.
- (b) Es kann potentielle Extremstellen geben, für die keine der Bedingungen zutrifft. Dann liefert der Satz auch keine Aussage !

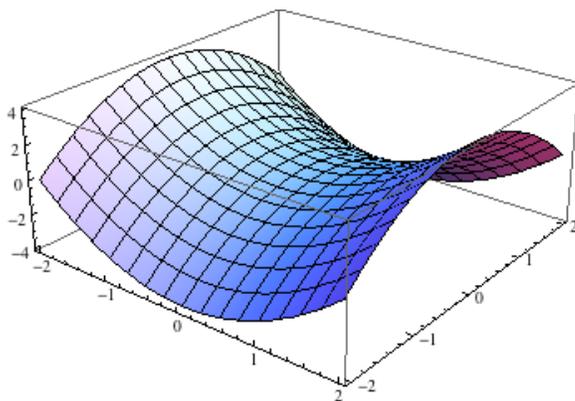


Abbildung 37: Sattelfläche $f(x, y) = x^2 - y^2$

Beispiele:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$. (s.o.) Die Hesse-Matrix ist:

$$\text{H } f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{H } f$ ist daher (unabhängig vom Punkt) positiv definit. Die stationäre Stelle $(0, 0)$ ist ein lokales Minimum.

- (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (siehe Abbildung 37). Es gilt:

$$\text{grad } f = (2x, -2y)$$

$(0, 0)$ ist die einzige potentielle Extremstelle (stationäre Stelle). Die Hesse-Matrix ist aber indefinit:

$$H f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$(0, 0)$ ist kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt.

(c) $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$. Die Hesse-Matrix ist:

$$H f = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

Für die potentielle Extremstelle $a = (0, 0)$ erhalten wir:

$$(H f)(a) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det((H f)(a) - \lambda E) = \lambda^2 - 9$$

Die Eigenwerte sind daher $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$, die Hesse-Matrix ist indefinit, und es liegt kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Für die potentielle Extremstelle $a = (1, 1)$ erhalten wir:

$$(H f)(a) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det((H f)(a) - \lambda E) = (-6 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 + 12\lambda + 27$$

Die Eigenwerte sind daher $\lambda = -6 \pm \sqrt{36 - 27}$, also $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -9$. Die Hesse-Matrix ist negativ definit, es liegt also ein lokales Maximum vor.

5.5 Totales Differential

Die partiellen Ableitungen geben die Wirkung kleiner Änderungen der Argumente in einer Richtung an. Für eine Funktion $z = f(x, y)$ von 2 Variablen gilt bei kleiner Änderung der x bzw. y -Werte in der Umgebung eines Punktes $a = (x_0, y_0)$:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a) \Delta x \text{ bzw. } \Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial y}(a) \Delta y$$

Bei gleichzeitiger Änderungen in x und y -Richtung erhält man:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \Delta y$$

Definition 5.5.1 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f sei auf D_f partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann heißt der folgende Ausdruck totales (oder vollständiges) Differential df :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Beispiele:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \sin(xy)$. Dann gilt:

$$df = (\sin(xy) + xy \cos(xy))dx + x^2 \cos(xy)dy$$

(b) $f : (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2}$. Dann gilt:

$$df = \frac{x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 x_2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} dx_1 + \frac{x_1 x_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2^2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} dx_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_3$$

5.6 Fehlerfortpflanzung

Im folgenden wird die Fehlerfortpflanzung besprochen, ohne allerdings näher auf die statistischen Grundlagen einzugehen.

Eindimensionaler Fall: Sei x eine Meßgröße und $z = f(x)$ eine von x abhängige Größe. Der Meßwert sei mit einem “Fehler”, einer “Meßabweichung” oder einer “Meßunsicherheit” Δx behaftet. Bei einer Meßreihe kann dazu die Standardabweichung des Mittelwertes verwendet werden. Die Linearisierung von f liefert für eine Eingangsänderung Δx eine Ausgangsänderung

$$\Delta z \approx f'(x) \Delta x$$

Der absolute maximale Fehler der abhängigen Größe beträgt daher

$$\Delta z_{max} = |f'(x)| \Delta x$$

Mehrdimensionaler Fall: Seien x_1, x_2, \dots, x_n Meßgrößen und $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine davon abhängige Größe. Eine Eingangsänderung $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ führt approximativ zu einer Ausgangsänderung

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Wie berechnet sich daraus der Fehler von z bei einem Eingangsfehler von $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$? Bei einer linearen Fehlerfortpflanzung (betragsmäßige Addition der Fehler) ergibt sich die maximale Meßunsicherheit:

$$(\Delta z)_{max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n$$

Handelt es sich um unabhängige Meßgrößen, so betrachtet man häufig die quadratische Gauß'sche Fehlerfortpflanzung (Transformation der Standardabweichungen):

$$(\Delta z)_{st} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2}$$

Beispiele:

(a) $z = f(x, y) = x^2y^3$. Bei linearer Fehleraddition erhält man:

$$(\Delta z)_{max} = |2xy^3|\Delta x + |3x^2y^2|\Delta y$$

und bei Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$(\Delta z)_{st} = \sqrt{4x^2y^6(\Delta x)^2 + 9x^4y^4(\Delta y)^2}$$

Sei z.B. $x = -1$, $y = 2$ (Messwert) und $\Delta x = \Delta y = 0,1$ (Meßunsicherheit). Dann erhält man für den berechneten Wert $z = (-1)^2 2^3 = 8$ die folgenden Fehlergrößen:

$$(\Delta z)_{max} = 16 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,1 = 2,8 \quad (\Delta z)_{st} = \sqrt{256 \cdot 0,01 + 144 \cdot 0,01} = 2$$

Die abhängige Größe kann also eine deutliche größere Unsicherheit als die Eingangsgrößen besitzen.

(b) $z = f(x, y) = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$. Die jeweiligen Fehler sind:

$$(\Delta z)_{max} = \frac{1}{|y|} \Delta x + \frac{|x|}{|y^2|} \Delta y$$

$$(\Delta z)_{st} = \sqrt{\frac{1}{y^2} (\Delta x)^2 + \frac{x^2}{y^4} (\Delta y)^2}$$

Betrachtet man z.B. die Messwerte $x = 1$, $y = 2$ und $\Delta x = \Delta y = 0,1$ so erhält man: $(\Delta z)_{max} = 0,075$ und $(\Delta z)_{st} \approx 0,056$.

Weiterhin kann man auch **relative** oder prozentuale Fehler angeben. Dies ist

$$\frac{(\Delta z)_{max}}{|z|} \text{ bzw. } \frac{(\Delta z)_{st}}{|z|}$$

Beispiel: $z = f(x, y) = \frac{x}{y}$. Bei linearer Fehlerfortpflanzung ergibt sich der relative Fehler:

$$\frac{(\Delta z)_{max}}{|z|} = \frac{|y|}{|x|} \left(\frac{1}{|y|} \Delta x + \frac{|x|}{|y^2|} \Delta y \right) = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$$

d.h. die relativen Fehler von x und y summieren sich.

Bei Gauß'scher Fehlerfortpflanzung erhalten wir:

$$\frac{(\Delta z)_{st}}{|z|} = \frac{|y|}{|x|} \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{y^2} + \frac{(\Delta y)^2 x^2}{y^4}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Dies ist die Länge des Vektors der relativen Fehler.

5.7 Implizite Funktionen

Funktionen können nicht nur *explizit* durch eine Gleichung vom Typ $z = f(x_1, \dots, x_n)$ sondern auch *implizit* durch eine Gleichung $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ beschrieben werden. Wir betrachten den Fall zweier Variablen, d.h. $F(x, y) = 0$. Kann man dann eine Funktion $y = f(x)$ bestimmen, die durch Auflösung dieser Gleichung nach y entsteht ?

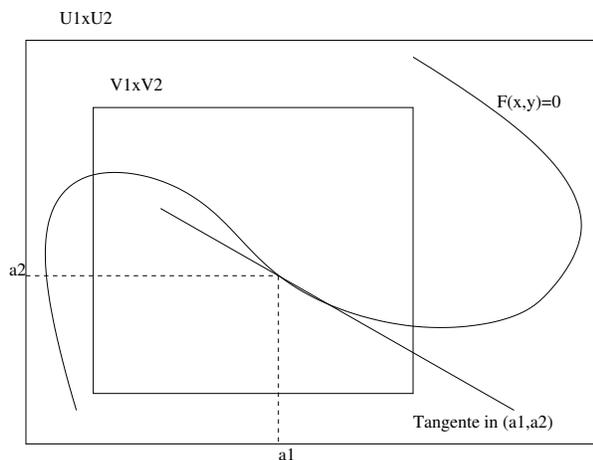


Abbildung 38: Durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ wird in der Umgebung von $(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$ implizit eine Funktion $f : V_1 \rightarrow V_2$ definiert.

Obwohl die praktische Umformung nach y häufig schwierig oder unmöglich ist, kann man trotzdem (unter gewissen Voraussetzungen) die Existenz einer solchen implizit definierten Funktion zeigen und auch ihre Ableitung angeben. Allerdings existiert in der Regel keine globale Lösung, weil es mehrere Lösungen für y geben kann wie schon das Beispiel $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (Einheitskreis) zeigt. In diesem Fall gibt es zwei Lösungen: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Man fixiert daher einen Punkt $a = (x, y)$ und definiert eine lokale Lösung in der Umgebung dieses Punktes.

Satz 5.7.1 Sei $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, wobei U_1, U_2 offene Mengen in \mathbb{R} (z.B. offene Intervalle) seien. Sei $a = (a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a_1, a_2) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a) \neq 0$. Dann definiert $F(x, y) = 0$ implizit eine Funktion $f : V_1 \rightarrow V_2$, wobei V_1, V_2 offene Intervalle in U_1 bzw. U_2 sind, $a_1 \in V_1$, $a_2 \in V_2$ und $F(x, f(x)) = 0$ gilt für $x \in V_1$. f ist stetig differenzierbar bei a_1 und die Ableitung lautet:

$$f'(a_1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a)}$$

Bemerkung 5.7.2 (a) Aus $F(x, y) = 0$ folgert man durch formale Rechnung mit den Differentialen:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Dies ist aber kein Beweis!

(b) Damit lässt sich auch die Gleichung der Tangente an $F(x, y) = 0$ an einem Punkt (a_1, a_2) mit $F(a_1, a_2) = 0$ bestimmen:

$$y = f(a_1) + f'(a_1)(x - a_1) = a_2 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2)}(x - a_1)$$

Beispiel: Wir definieren implizit eine Funktion $y = f(x)$ durch $\sin(xy) = y$, d.h. $F(x, y) = \sin(xy) - y = 0$ (siehe Abbildung 39). Es gilt für $a = (\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$: $F(a) = 0$. Die partiellen Ableitungen sind: und $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos(xy) - 1$, $\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos(xy)$. Da die partielle Ableitung nach y bei $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ ungleich 0 ist, kann der Satz angewendet werden. In einem Intervall um $a_1 = \frac{\pi}{3}$ existiert also eine implizit definierte Funktion $y = f(x)$ und die Ableitung bei a_1 ist:

$$f'(a_1) = -\frac{y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 1}(a_1, a_2) = -\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{\pi}{6}\sqrt{3} - 1} = -\frac{3}{2\pi - 4\sqrt{3}}$$

Die Tangentengleichung am Punkt a ist:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\pi - 4\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})$$

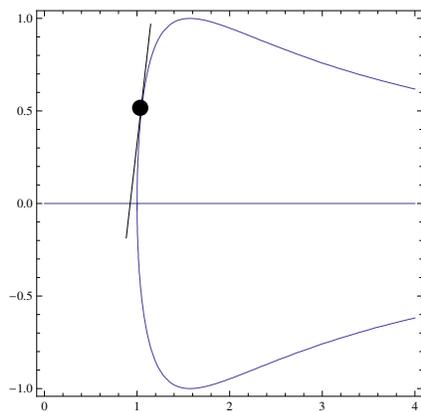


Abbildung 39: $F(x, y) = \sin(xy) - y = 0$ mit Tangente bei $a = (\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$

5.8 Mehrdimensionale Integration

Ähnlich wie Funktionen von einer Veränderlichen können auch Funktionen mit mehreren Variablen integriert werden. Wir betrachten an dieser Stelle nur reellwertige Funktionen $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ von zwei Variablen, die über eine Rechtecksfläche integriert werden sollen. Das Integral bestimmt das Volumen, das der Graph von $f(x, y)$ mit der x, y -Ebene einschließt, wobei Volumenelemente oberhalb der Ebene positiv in das Integral eingehen, und entsprechend unterhalb der Ebene negativ. Wir erhalten ein Doppelintegral:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx$$

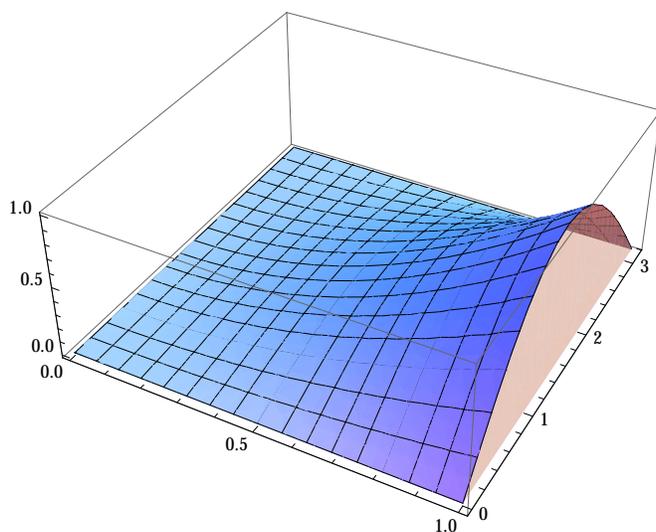


Abbildung 40: Das Integral $\int_0^1 \int_0^\pi x^2 \sin(y) \, dy \, dx$ liefert das Volumen zwischen dem Graphen von $f(x, y) = x^2 \sin(y)$ und der x, y -Ebene für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq \pi$.

Das zweidimensionale Riemann-Integral kann ebenso wie das eindimensionale Integral durch Ober- und Untersummen von oben bzw. unten approximiert werden. Hierfür zerlegt man den Definitionsbereich in kleinere Rechtecke und nähert das Integral von oben und unten indem man das Produkt aus dem jeweiligen größten bzw. kleinsten Funktionswert mit dem Flächeninhalt multipliziert und die entstehenden Quadervolumina aufsummiert (siehe Abbildung 41).

Die folgende Definition ist analog zur Definition 2.1.3 des Riemann-Integrals im eindimensionalen Fall.

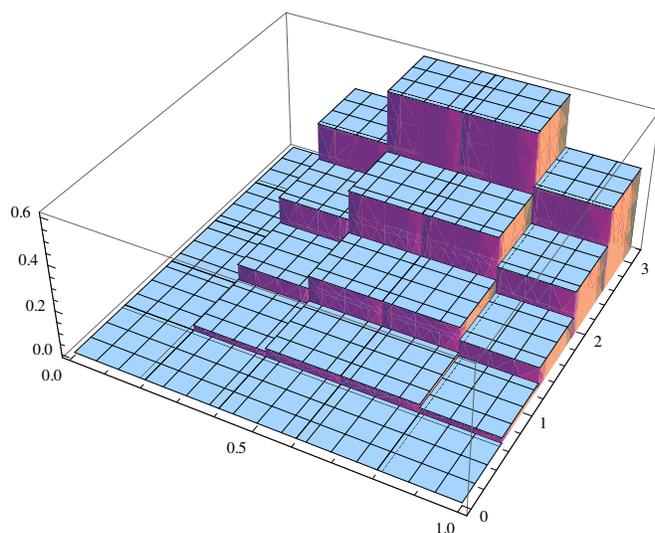


Abbildung 41: Zerlegung in Quader zur Näherung des Integrals.

Definition 5.8.1 Sei $D_f = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion von zwei Variablen. f heißt Riemann-integrierbar auf D_f , falls es eine Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von D_f in kleinere Rechtecke gibt, deren Feinheit nach 0 konvergiert und deren Obersummen und Untersummen der zugehörigen Quadervolumina gegen einen gemeinsamen reellen Grenzwert (das Integral) konvergieren, d.h.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx$$

Ähnlich wie im eindimensionalen Fall ist eine grosse Klasse von Funktionen integrierbar, es gilt z.B. der folgende Satz:

Satz 5.8.2 Sei $D_f = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von zwei Variablen. Dann ist f Riemann-integrierbar auf D_f .

Der folgende Satz von Fubini liefert eine konkretes Verfahren zur Berechnung von zweidimensionalen Integralen über Rechtecksflächen. Die Berechnung kann durch iterierte eindimensionale Integration erfolgen. Dieser Satz gilt auch allgemein für die Integration über n -dimensionale Quader.

Satz 5.8.3 Sei $D_f = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion von zwei Variablen. Dann gilt:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right) dy =$$

Insbesondere sind also die durch Integration nach x definierte Funktion

$$f_x(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx$$

und die durch Integration nach y definierte Funktion

$$f_y(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy$$

ebenfalls integrierbar und ihr Integral liefert das betrachtete zweidimensionale Integral.

Beispiel (siehe Abbildung 40):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi x^2 \sin(y) \, dy \, dx &= \\ \int_0^1 \left(\int_0^\pi x^2 \sin(y) \, dy \right) dx &= \\ \int_0^1 [-x^2 \cos(y)]_{y=0}^{y=\pi} dx &= \\ \int_0^1 2x^2 \, dx &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Hier wurde zuerst nach y , dann nach x integriert. Die Integration in umgekehrter Reihenfolge ist ebenso möglich und liefert das gleiche Ergebnis.



Bei mehrdimensionalen Integralen kann man nacheinander nach den einzelnen Variablen integrieren (wie im eindimensionalen Fall) und dabei die übrigen Variablen als konstant ansehen.

Ausblick: Dies ist erst der Beginn der allgemeinen Integralrechnung. Man kann das n -dimensionale Integral über allgemeine Bereiche betrachten (nicht notwendig Quader, auch unbeschränkt). Der *Transformationssatz* verallgemeinert die Substitutionsregel auf n Variablen. Im Rahmen der *Vektoranalysis* werden auch vektorwertige Funktionen integriert. Außerdem zeigt sich, dass das *Lebesgue-Integral*

leistungsfähiger ist als das in den Grundvorlesungen in der Regel behandelte Riemann-Integral.

Literatur

P. Hartmann, Mathematik für Informatiker, vieweg Verlag.

T. Westermann, Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag.

T. Rießinger, Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag.

W. Schäfer, G. Trippler, G. Engeln-Müllges (Hrg.), Kompaktkurs Ingenieurmathematik, Fachbuchverlag Leipzig.

L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1 und 2, vieweg Verlag.

G. Strang, Calculus, Wellesley-Cambridge Press
<http://ocw.mit.edu/ans7870/resources/Strang/Edited/Calculus/Calculus.pdf>

G. Strang, Lineare Algebra, Springer Verlag.

A. Fetzer, H. Fränkel, Mathematik 1, Springer Verlag.

M. Andrié, P. Meier, Analysis für Ingenieure, BI-Hochschultaschenbücher.

K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1 : Analysis, B.G. Teubner Verlag.

K. Meyberg, P. Vachenauer, Höhere Mathematik 1, Springer Verlag.

C. Blatter, Ingenieur Analysis 1, Springer Verlag.

W. Walter, Analysis 1 und Analysis 2, Springer Verlag.

O. Forster, Analysis 1, vieweg Verlag.

D. C. Lay, Linear Algebra and its Applications, Addison Wesley Verlag.

